Neven Elezović

Andrea Aglić

LINEARNA ALGEBRA

ZBIRKA ZADATAKA

0. izdanje

Zagreb, 1995

Urednik
Prof. dr. sc. Neven Elezović

Za nakladnika
Sandra Gračan, dipl. inž.

Nakladnik
Element, Zagreb

Tisak
Spiridion Brusina, D. Lomnica

Slog, crteži i prijelom
Element, Zagreb

Design ovitka
Boje vremena, Zagreb

PREDGOVOR

Ova je zbirka pisana po programu istoimenog predmeta koji se predaje na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, u prvom semestru sa satnicom od 3 + 2 sata tjedno (45 sati predavanja i 30 sati vježbi). Ona prati odgovarajući udžbenik.

Na početku svakoga poglavlja dan je kratak podsjetnik najvažnijih definicija i teorema. Sva potrebna detaljnija objašnjenja čitatelj treba potražiti u udžbeniku.

U svakom su poglavlju zatim dani zadaci s detaljnim rješenjima. Oni se (možda ne svi) rješavaju na auditornim vježbama. Student svakako treba pokušati samostalno riješiti i te zadatke, ne čitajući unaprijed rješenje. Na koncu svakoga poglavlja naveden je dovoljan broj zadataka (njihovi su odgovori na kraju zbirke) koji trebaju poslužiti za samostalnu vježbu. Neki od njih proširuju i produbljuju osnovno gradivo i namijenjeni su boljim studentima.

Sigurni smo da će i ova zbirka pomoći studentima u lakšem usvajanju ovoga lijepog dijela matematike. Kako je riječ o pripremnom izdanju, bit ćemo zahvalni na svakoj korisnoj napomeni ili ispravku pogrešaka koje su ostale u knjizi.

Autori

U Zagrebu, listopada 1995.

SADRŽAJ

1. Matrice

Matrica je svaka pravokutna tablica realnih ili kompleksnih brojeva. Ako ona ima m redaka i n stupaca, tada kažemo da je **tipa** $m \times n$ i zapisujemo je u obliku

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Element a_{ij} naziva se **opći element** matrice $\mathbf{A}$. To je realan ili kompleksan broj. Opći element označavamo često i na način $(\mathbf{A})_{ij}$.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ označavamo s $\mathscr{M}_{mn}$.

* * *

Za **kvadratnu** matricu tipa $n \times n$ kažemo da je **reda** n. Skup svih kvadratnih matrica toga reda označavamo s $\mathscr{M}_n$. Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ čine **dijagonalu** kvadratne matrice.

Kvadratna matrica je **gornja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$ (svi elementi ispod dijagonale jednaki su nuli), **donja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$ (svi elementi iznad dijagonale jednaki su nuli), **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, **skalarna** ako je dijagonalna i svi su joj dijagonalni elementi jednaki. **Jedinična matrica** je dijagonalna matrica s jedinicama na dijagonali. Označavamo ju s $\mathbf{I}$. Nul matricu, čiji su svi elementi jednaki nuli, označavamo s $\mathbf{0}$.

Transponirana matrica $\mathbf{A}^\top$ matrice $\mathbf{A}$ ima elemente $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$. Ona se dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ zamjenom redaka i stupaca, što se kod kvadratne matrice može interpretirati i kao zrcaljenje s obzirom na dijagonalu. Kvadratna matrica je **simetrična** ako vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j; **antisimetrična** ako vrijedi $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ za sve i, j.

1.1. Operacije s matricama

Operacija **množenja skalara s matricom** definira se za svaki $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}$ na način

$$(\lambda \mathbf{A})_{ij} := \lambda a_{ij}.$$

To je ponovo matrica istoga tipa.

Operacija **zbrajanja matrica** definira se za matrice istoga tipa na način

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} := a_{ij} + b_{ij}.$$

(Dvije se matrice zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajući elementi.)

Množenje matrica definirano je samo za **ulančane** matrice: broj stupaca prve mora se podudarati s brojem redaka druge matrice. Ako je $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, i $\mathbf{B}$ tipa $n \times p$, tada je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran i ima tip $m \times p$,

$$(\mathbf{AB})_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

1.1. Izračunaj $2\mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{B} - \mathbf{C}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 21 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo prvo umnoške matrice i skalara (pomnožimo svaki element matrice skalarom)

$$2\mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -4 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{3}\mathbf{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 21 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sve su matrice istoga tipa 2×3 pa je

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} + \tfrac{1}{3}\mathbf{B} - \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 10 & -4 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-1-10 & 10+0-8 & -4+4-5 \\ -6+7+7 & 0+\frac{1}{3}+2 & 4+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & -5 \\ 8 & \frac{7}{3} & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Izračunaj umnožak matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 14 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Matrica $\mathbf{A}$ je tipa 3×2, $\mathbf{B}$ tipa 2×4 te je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran i bit će tipa 3×4:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 14 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 10 \cdot 8 + 2 \cdot (-2) & 10 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 10 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \\ 14 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 & 14 \cdot 8 + (-1) \cdot (-2) & 14 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 14 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 & 2 \cdot 8 + (-5) \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 24 & 76 & 16 & 40 \\ 26 & 114 & 11 & 56 \\ -6 & 26 & -13 & 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Primijeti da umnožak $\mathbf{BA}$ nije definiran.

1.3. Za matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ odredi $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$. Što se može zaključiti?

RJEŠENJE. Vrijedi

$$
\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}.
$$

Vidimo da je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Množenje matrica nije komutativno. (Za neke matrice ovakvi umnošci mogu biti jednaki.)

1.4. Ako je $\mathbf{x} = [3,\ 1,\ 2]$, $\mathbf{y} = [2,\ -1,\ 1]$, izračunaj $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T}$.

RJEŠENJE.

$$
\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [2,\ -1,\ 1] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T} = [3,\ 1,\ 2] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [7].
$$

Matricu s jednim elementom poistovjećujemo s brojem. Zato je $\mathbf{x}\mathbf{y}^\mathsf{T} = 7$.

1.5. Izračunaj $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 8$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. a) Imamo $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$, zato je

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 + 2\mathbf{A}^4 - \mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} + 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$, $f(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$.

c) $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

1.6. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Odredi matricu $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takvu da vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Provjeri da pri tom vrijedi $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

RJEŠENJE. Iz jednakosti

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -5a+3c & -5b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobiju se dva sustava

$$\begin{cases} 2a - c = 1, \\ -5a + 3c = 0, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 2b - d = 0, \\ -5b + 3d = 1. \end{cases}$$

Njihova su rješenja $a = 3$, $c = 5$, $b = 1$, $d = 2$. Dakle $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Za ovu matricu vrijedi i

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.7. Za zadanu matricu $\mathbf{A}$ odredi najopćenitiji oblik matrice $\mathbf{B}$ istoga tipa za koju vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, ako je a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Označimo elemente matrice $\mathbf{B}$ na način $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) Iz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ imamo

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde je

$$\begin{cases} a + 2c = 0, \\ 3a + 4c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0, \\ 3b + 4d = 0. \end{cases}$$

Rješenja ovih sustava su $a = b = c = d = 0$. Stoga je matrica $\mathbf{B}$ nulmatrica.

b) Sada iz $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem elemenata dobivamo sustave

$$\begin{cases} a + 2c = 0, \\ 3a + 6c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0, \\ 3b + 6d = 0. \end{cases}$$

Rješenje prvoga je $a = -2c$, a drugoga $b = -2d$, pa jednadžbu zadovoljava svaka matrica oblika $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{bmatrix}$ gdje su c i d po volji odabrani realni brojevi.

1.8. Odredi sve matrice koje komutiraju s $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Označimo traženu matricu s $\mathbf{A}$. Da bi oba umnoška $\mathbf{AX}$ i $\mathbf{XA}$ bila definirana, takva matrica mora biti kvadratna, istoga reda kao i $\mathbf{X}$. Dakle, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Iz $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde dobivamo niz jednakosti $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, $a_{21} = a_{32}$, $a_{12} = a_{23}$, $a_{22} = a_{33}$. Označimo li praktičnije $a_{11} = x$, $a_{12} = y$, $a_{13} = z$, dobivamo traženu matricu u sljedećem obliku

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

1.9. Neka je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (broj komponenti n u sljedećim primjerima nije uvijek jednak). Odredi matricu $\mathbf{A}$ ako je poznat umnožak $\mathbf{Ax}$:

a) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_4 \\ 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 \end{bmatrix}$; d) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_4 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Matrica $\mathbf{A}$ mora imati onoliko redaka koliko i rezultat $\mathbf{Ax}$. Broj stupaca matrice $\mathbf{A}$ odgovara broju komponenti vektora $\mathbf{x}$. Njih možemo tek naslutiti na osnovu danih umnožaka, tako u primjeru **a)** matrica ima *barem* dva stupca, no može imati i više. Tako npr. uvjet zadovoljavaju sljedeće matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

itd. Mi ćemo izabrati matricu s minimalnim brojem stupaca.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.10. Izračunaj $\mathbf{A}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo prvih nekoliko potencija.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog možemo naslutiti da vrijedi $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$. Slutnju ćemo provjeriti matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ baza indukcije je ispunjena. Pretpostavimo zato da je $\mathbf{A}^n$ gornjeg oblika. Tada imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^n \cdot a & a^n + na^{n-1} \cdot a \\ 0 & a^n \cdot a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

1.11. Izračunaj $\mathbf{A}^n$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Direktnim računom dobivamo

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Slično je $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$ pa naslućujemo da je $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$. Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ baza indukcije je ispunjena. Dokažimo korak indukcije.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha & -\cos n\alpha\sin\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha \\ \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha & -\sin n\alpha\sin\alpha + \cos n\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.12. Koristeći relacije

$$\begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

izračunaj $\begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix}^{10}$.

RJEŠENJE. Označimo matrice redom s $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ pa vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ i $\mathbf{DB} = \mathbf{I}$. Koristeći asocijativnost matričnog množenja imamo

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{BCD})(\mathbf{BCD}) = \mathbf{BC}(\mathbf{DB})\mathbf{CD} = \mathbf{BC}^2\mathbf{D}.$$

Slično vrijedi i za sve ostale potencije:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{10} &= (\mathbf{BCD})(\mathbf{BCD})\cdots(\mathbf{BCD}) \\ &= \mathbf{BC}(\mathbf{DB})\mathbf{C}(\mathbf{DB})\cdots(\mathbf{DB})\mathbf{CD} = \mathbf{BCICI}\cdots\mathbf{ICD} = \mathbf{BC}^{10}\mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3^{11} & 4 \\ 5\cdot 3^{10} & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 3^{11} - 20 & -4\cdot 3^{11} + 12 \\ 35\cdot 3^{10} - 35 & -20\cdot 3^{10} + 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Zadaci za vježbu

1.13. Zapiši matricu $\mathbf{A}$ tipa 3×3 čiji je opći element a_{ij} dan formulom **a)** $a_{ij} = i + j$; **b)** $a_{ij} = |i - j|$; **c)** $a_{ij} = ij$; **d)** $a_{ij} = (i - j)^2$; **e)** $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$; **f)** $a_{ij} = i - j + 1$. Koje su među njima simetrične?

1.14. Izračunaj:

a) $3\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -10 \\ -8 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Kakve su dobivene matrice?

1.15. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj: **a)** $2\mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}}$; **b)** $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} - 2\mathbf{B}$.

1.16. Odredi umnoške matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Kakve su dobivene matrice?

1.17. Izračunaj: **a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.18. Izračunaj umnoške:

a) $\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix}2&-1&3&-4\\3&-2&4&-3\\5&-3&-2&1\\3&-3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&6&9\\5&7&4&5\\3&4&5&6\\2&1&1&2\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}5&7&-3&-4\\7&6&-4&-5\\6&4&-3&-2\\8&5&-6&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\1&3&5&7\\2&4&6&8\end{bmatrix}$.

1.19. Pomnoži matrice:

a) $\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix}4&2&3\\4&-5&2\\-2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&2\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix}3&-2&-1\\4&-1&-3\\2&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix}1&-2&5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&0\\2&4\\1&-5\end{bmatrix}$.

1.20. Uvjeri se neposrednim množenjem da vrijedi $(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$, ako je

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&3&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}-3&1\\2&1\\-2&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

1.21. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&-5\end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix}6&2\\1&-1\\0&-4\end{bmatrix},\quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix}0&5&1\\2&2&7\\8&0&1\end{bmatrix}.$$

Odredi sve umnoške ovih matrica (koji su definirani).

1.22. Zadane su matrice

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&-2\\2&-1&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&-1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&0&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}2&1&-1\\3&1&2\\-1&0&4\end{bmatrix}$.

Izračunaj: 1) $\mathbf{AB}$; 2) $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top$; 3) $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$; 4) $\mathbf{BA}$.

1.23. Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, $\mathbf{I}_m$, $\mathbf{I}_n$ jedinične matrice reda m odnosno n. Dokaži da je $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

1.24. Neka su $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektor-stupci jednake duljine i $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$. Pokaži da vrijedi $\mathbf{A}^2 = \lambda\mathbf{A}$ za neki skalar λ.

* * *

1.25. Neka je matrica A tipa 5×3, B tipa 3×3, C tipa 3×2, D i E tipa 2×1. Odredi koji je od sljedećih izraza definiran i koji je tip rezultirajuće matrice

a) $\mathbf{A}^6$; b) $\mathbf{B}^4$; c) $\mathbf{ABC}$; d) $\mathbf{ABCD}$;
e) $\mathbf{ACBD}$; f) $\mathbf{CD}+\mathbf{E}$; g) $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$; h) $\mathbf{BC}+\mathbf{CB}$.

1.26. Izmnoži sljedeće matrične izraze, pretpostavljajući da su svi oni definirani.

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$; b) $(2\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+2\mathbf{B})$;
c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}(\mathbf{D}+\mathbf{E})$; d) $(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+3\mathbf{I})$;
e) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3$; f) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3$, ako je $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

1.27. Neka je $f(x)=x^4-2x^3+x-1$. Odredi $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$; c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

1.28. Odredi $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $f(x)=3x^2-2x+5$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}$;

b) $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&2&-3\\1&3&-1\\2&2&-1\end{bmatrix}$.

1.29. Provjeri da za matricu $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&0&1\\-2&1&3\end{bmatrix}$ i polinom $f(x)=x^3-4x^2+5x+4$ vrijedi $f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

1.30. Pokaži da matrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ zadovoljava jednadžbu

$$\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(ad-bc)\mathbf{I}=\mathbf{0}.$$

* * *

1.31. Izračunaj matrice

a) $\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}^5$; b) $\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}^{10}$; c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^5$.

1.32. Neka je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2\\-3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Izračunaj sljedeće:

a) $\mathbf{A}^{10}$; b) $\mathbf{B}^{20}$; c) $\mathbf{C}^4$; d) $\mathbf{D}^{20}$;
e) $(\mathbf{ABC})^4$; f) $(\mathbf{CBA})^4$; g) $\mathbf{C}^3\mathbf{B}^3$; h) $(\mathbf{CB})^3$.

1.33. Izračunaj: a) $\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}^2$; b) $\begin{bmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{bmatrix}^3$; c) $\begin{bmatrix}1&a\\a&1\end{bmatrix}^4$; d) $\begin{bmatrix}4&-1\\5&-2\end{bmatrix}^5$.

1.34. Izračunaj: a) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n$; b) $\begin{bmatrix}1&\lambda\\0&1\end{bmatrix}^n$; c) $\begin{bmatrix}1&\lambda\\0&2\end{bmatrix}^n$; d) $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}^n$. e) $\begin{bmatrix}3&-1\\4&-1\end{bmatrix}^n$.

1.35. Neka je $A = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. Pokaži da za svaki prirodni n vrijedi

$$A^n = \begin{bmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

1.36. Izračunaj zadane potencije matrica n-toga reda:

a) $\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&&&&\\0&0&0&\dots&1\\1&0&0&\dots&0\end{bmatrix}^n$; b) $\begin{bmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\vdots&&&\ddots&\\0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}^3$; c) $\begin{bmatrix}1&1&0&0&\dots&0\\0&1&1&0&\dots&0\\0&0&1&1&\dots&0\\\vdots&&&&\ddots&\\0&0&0&0&\dots&1\end{bmatrix}^{n-1}$.

1.37. Izračunaj $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}^5$ koristeći $\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$.

* * *

1.38. Za zadanu matricu **A** odredi najopćenitiji oblik matrice **B** za koju vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2&5\\0&0\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$.

1.39. Odredi neke ne-nul matrice **A** i **B** takve da je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, ako je a) **A** tipa 5×3, **B** tipa 3×1, b) **A** tipa 5×2, **B** tipa 2×2, c) **A** tipa 1×2, **B** tipa 2×3.

1.40. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}3&2\\-2&1\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&-5\\2&3\end{bmatrix}.$$

Odredi matricu **X** za koju vrijedi **a)** $2\mathbf{A}+3\mathbf{X} = \mathbf{I}$; **b)** $3\mathbf{A}-2\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

1.41. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom

a) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}7&-3\\5&-2\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

1.42. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom

a) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1&-2\\1&3\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

1.43. Odredi sve matrice koje komutiraju sa svim matricama drugoga reda.

1.44. Dokaži da neka matrica komutira sa svim dijagonalnim matricama onda i samo onda ako je i sama dijagonalna.

1.45. Dokaži da matrica $\mathbf{A}$ reda n komutira sa svim matricama istoga reda onda i samo onda ako je oblika $\lambda\mathbf{I}$.

* * *

1.46. Odredi sve matrice drugoga reda čiji je kvadrat jednak nul-matrici.

1.47. Odredi sve matrice drugoga reda čiji je kub jednak nul-matrici.

1.48. Ako za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vrijedi $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ za neki prirodni broj n, dokaži da je tada $ad - bc = 0$.

1.49. Neka je $\mathbf{A}$ matrica drugoga reda i $n > 2$ prirodan broj. Pokaži da jednakost $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ vrijedi onda i samo onda ako vrijedi i $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$.

* * *

1.50. Ako je $A^2 = \mathbf{I}$, tada se matrica $\mathbf{A}$ naziva **involutorna**.
a) Odredi sve involutorne matrice drugoga reda.
b) Pokaži da je $\mathbf{A}$ involutorna onda i samo onda ako vrijedi $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

1.51. Matrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ je **nilpotentna** ako za neki pozitivni cijeli broj p vrijedi $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$. Pokaži da je svaka gornja trokutasta matrica s nulama na glavnoj dijagonali nilpotentna.

1.52. Pokaži da je umnožak dviju trokutastih matrica istoga tipa ponovno trokutasta matrica istoga tipa.

1.53. Dokaži da za operaciju transponiranja vrijedi $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

1.54. Dokaži da je za svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ matrica $\mathbf{AA}^\top$ simetrična.

1.55. Svaka se kvadratna matrica dade rastaviti na zbroj simetrične i antisimetrične. Provjeri da su to matrice

$$\mathbf{A}_s = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top), \qquad \mathbf{A}_a = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top).$$

Odredi te matrice ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

1.56. Pokaži da jednakost $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ vrijedi onda i samo onda kad matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

1.57. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice. Pokaži na primjeru da $\mathbf{AB}$ ne mora biti simetrična.

1.58. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice. Dokaži da je $\mathbf{AB}$ simetrična onda i samo onda ako matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

1.59. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ antisimetrične matrice. Dokaži da je njihov produkt $\mathbf{AB}$ antisimetrična matrica onda i samo onda ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ antikomutiraju tj. ako vrijedi $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$.

1.60. Provjeri da množenje dijagonalnom matricom slijeva odgovara množenju redaka s njenim dijagonalnim elementima. Slično, množenje dijagonalnom matricom zdesna za rezultat ima množenje stupaca sa odgovarajućim dijagonalnim elementima.

1.61. Komutatorom $[\mathbf{AB}]$ kvadratnih matrica reda n naziva se matrica $[\mathbf{AB}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$. Pokaži da komutator posjeduje sljedeća svojstva:
a) $[\mathbf{AB}] = \mathbf{0}$ onda i samo onda ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju;
b) $[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}]$ (antikomutativnost);
c) $[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}] + [[\mathbf{BC}]\mathbf{A}] + [[\mathbf{CA}]\mathbf{B}] = \mathbf{0}$ (Jacobijev identitet).

1.62. Za kompleksnu matricu $\mathbf{A}$ definiramo **konjugiranu** matricu $\bar{\mathbf{A}}$ na način $(\bar{\mathbf{A}})_{ij} = \bar{a}_{ij}$, gdje je $\bar{a}_{ij}$ kompleksno konjugirani broj broju a_{ij}. Također definiramo **adjungiranu** matricu $\mathbf{A}^*$ na način $\mathbf{A}^* = (\bar{\mathbf{A}})^T$.

Za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 3i & 0 \\ 1+2i & 5 & 6-i \\ 2 & 3-i & -2i \end{bmatrix}$ nađi $\bar{\mathbf{A}}$ i $\mathbf{A}^*$.

1.63. Za (kompleksnu) kvadratnu matricu kažemo da je **hermitska** ako vrijedi $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, **antihermitska** ako je $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$. (U realnom slučaju ove se matrice podudaraju s simetričnim i antisimetričnim jer je tada $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T$.) Pokaži da je u hermitskoj matrici dijagonala uvijek realna, a u antihermiskoj čisto imaginarna. Pokaži da se svaka kvadratna matrica može prikazati kao zbroj hermitske i antihermitske matrice.

1.64. Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ takva da vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ za sve $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$. Pokaži da je $\mathbf{A}$ jedinična matrica.

1.65. Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ definiramo njen **trag** kao sumu dijagonalnih elemenata:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} = \ldots + a_{nn}.$$

Dokaži da vrijedi $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T)$ za sve $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$.

1.66. Dokaži da ne postoje kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da vrijedi $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

1.67. **Jordanov produkt** kvadratnih matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definira se na način $\mathbf{A} * \mathbf{B} := \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})$. Dokaži sljedeća svojstva: a) $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A}$; b) $\mathbf{A} * \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$; c) $\mathbf{A} * \mathbf{I} = \mathbf{A}$; d) $\mathbf{A} * (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} * \mathbf{B} + \mathbf{A} * \mathbf{C}$.

1.68. Neka je $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Uvjeri se da vrijedi $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$. Pokaži da se skup svih matrica oblika

$$\{\mathbf{Z} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

s obzirom na operacije zbrajanja i množenja matrica ponaša identično skupu kompleksnih brojeva $\{z = \alpha + i\beta\}$.

2. Determinante

Determinanta realne kvadratne matrice je funkcija $\det : \mathcal{M}_n \to \mathbf{R}$. Determinantu matrice A označavamo s

$$\det \mathrm{A} \quad \text{ili} \quad |\mathrm{A}| \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiramo je induktivno po redu n matrice.

Za $n = 1$ i $\mathrm{A} = [a_{11}]$ je $\det \mathrm{A} = a_{11}$.

Za $n = 2$ i $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Za matrice višega reda determinanta se definira (i može računati) **razvojem po bilo kojem retku ili stupcu**, na način

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Općenito se determinanta matrice reda n dobije pomoću determinanti reda $n - 1$ tako da se zbroje (ili oduzmu) produkti elemenata nekog retka ili stupca s determinantama matrica koje se dobiju uklanjanjem retka i stupca u kojem se taj element nalazi. Točnije zapisano

$$\det \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

(rastav po i-tom retku, ili

$$\det \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

(rastav po j-tom stupcu). Tu je M_{ij} **minor elementa** a_{ij}: determinanta matrice reda $n - 1$ u kojoj se ne nalazi i-ti redak niti j-ti stupac početne matrice.

Definicija determinante je dobra, pošto ovaj **Laplaceov razvoj** ne ovisi o izboru retka ili stupca po kojem vršimo razvoj.

Izbor predznaka + ili − pamtimo po sljedećoj shemi za matrice reda 3 i 4:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

2.1. Laplaceov razvoj i Sarrusovo pravilo

Direktnim razvojem po nekom retku ili stupcu računamo uglavnom determinante matrica maloga reda (3 ili 4). Specijalno, za determinante trećega reda ponekad je brže dati gotov razvoj:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Ovaj se razvoj pamti iz sljedećeg zapisa kojeg nazivamo **Sarrusovo pravilo**. Prva dva stupca determinante se prepišu iza trećega i potom izmnože po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama. Padajuće dijagonale nose pozitivan, a rastuće negativan predznak:

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{|ccc|cc} \overset{+}{a_{11}} & \overset{+}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \underset{-}{a_{31}} & \underset{-}{a_{32}} & \underset{-}{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array} \begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

2.1. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. **a)** Determinantu računamo razvojem po trećem retku

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-2 - (-1)) + (2 - 3) = -2.$$

b) Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (1-4) - 2(2+4) + 2(-4-2) = -27.$$

c) Sarrusovim pravilom

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -12 + 6 + 6 - (6 - 8 + 9) = -7.$$

d) 0.

e) 4.

2.2. Izračunaj determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Razvijamo po trećem retku

$$D = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \text{(Sarrusovim pravilom)}$$
$$= 2(-9 - 20 + 6 + 30 + 12 - 3)$$
$$+ (-9 - 4 + 50 - 2 - 60 - 15)$$
$$+ (9 + 3 - 25 + 1 + 45 + 15)$$
$$= 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40.$$

2.2. Svojstva determinanti

Navedimo neka svojstva determinanti.

1) $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

2) Zamjenom dva retka (ili stupca) determinanta mijenja predznak.

3) Determinantu množimo skalarom tako da tim skalarom pomnožimo sve elemente nekog retka ili stupca determinante. Ovo se pravilo češće koristi na način da se svi elementi nekog retka ili stupca skrate za zajednički faktor koji se izvlači ispred determinante.

4) Ako su svi elementi nekog retka (ili stupca) jednaki nuli, determinanta je jednaka nuli.

5) Ako su u determinanti dva retka (ili stupca) jednaka (ili proporcionalna), ona je jednaka nuli.

6) Vrijednost determinante se ne mijenja ako se nekom retku (ili stupcu) pribroje elementi nekog drugog retka (ili stupca) pomnoženi skalarom λ.

7) Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

8) **Binet-Cauchyjev** teorem: $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Od ovih svojstava pri računanju determinante najčešće koristimo svojstvo 6. Cilj je pomoću takve transformacije dovesti matricu na gornju (rjeđe donju) trokutastu i tako izračunati njenu vrijednost.

2.3. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. **a)** Determinantu transformiramo tako da drugi redak oduzmemo od prvog:

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r - 2.r}\big) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 2b - a.$$

b) Uz određeni oprez, u jednom koraku može se sprovoditi nekoliko transformacija tipa 6. Dopušteno je jednom retku *dodati linearnu kombinaciju* nekoliko preostalih redaka:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r-2.r-3.r}\big) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \big(\textit{rastav po prvom retku}\big)$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1.$$

c)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r+(2.r+3.r+4.r)}\big) = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \big(\mathit{2.r-2\times 1.r,\ 3.r-2\times 1.r,\ 4.r-2\times 1.r}\big)$$

$$= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \big(\textit{trokutasta matrica}\big) = 11 \cdot 3^3 = 297.$$

d)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (1.r{+}4.r,\ 2.r{+}3.r) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 9^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (4.r{-}5\times 1.r,\ 3.r{-}5\times 2.r)$$

$$= 81 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 81.$$

* * *

Dakako da ovdje navedeni postupci računanja nisu jedini mogući, pa možda čak niti 'najjednostavniji'; čitatelj može potražiti i druge načine za njihov izračun.

Pri tom treba paziti da se pri korištenju svojstava determinanti ne učini *circulus viciosus* — vrtnja u krugu. Spomenuli smo da je dozvoljeno u jednom koraku retku dodati linearnu kombinaciju nekolicine preostalih, međutim ako se to učini s nekolicinom redaka istovremeno, vrlo je vjerojatno da će doći do pogreške. Pogrešna primjena može dovesti i do ovakovih 'računa'

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1.r{+}2.r, 2.r{+}1.r)$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1.r{-}2.r) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mi ćemo ubuduće koristiti sljedeće pravilo (koje je upotrebljeno u zadatku c): dopušteno je u jednom koraku svakom (osim jednog) dodati taj redak pomnožen s brojem.

2.4. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. a) 0 (dva identična stupca).

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (2.s-1.s,\ 3.s-1.s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

c)

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = (1.r+(2.r+3.r)) = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = (2.s-1.s,\ 3.s-1.s)$$

$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)(-x^2-y^2+xy) = -2(x^3+y^3).$$

2.5. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. a) 0 (3. redak).

b) 0 (1. redak = 2 × 2. redak).

c) 0 (3. redak = 2 × 1. redak + 2. redak).

Dakako da ova veza nije očigledna. Međutim, svaki drugi ispravan način računanja ove determinante dati će isti rezultat.

d) 0 (3. redak = 3 × 1. redak + 2 × 2. redak).

e)

$$D = -3\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1.r-2.r) = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 377 & 252 & 126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

f) $D = (2.r-1.r) = \begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2789 - 3453 = -664.$

2.6. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE.

a) razvojem po prvom stupcu:

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

b)

$$D = \left(\textit{po 2. stupcu}\right) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\textit{po 1. stupcu}\right) = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12.$$

c)

$$D = \left(\textit{izlučimo 25 iz 1.s}\right) = 25\begin{vmatrix} 1 & 31 & 17 & 43 \\ 3 & 94 & 53 & 132 \\ 3 & 94 & 54 & 134 \\ 1 & 32 & 20 & 48 \end{vmatrix}$$
$$= \left(2.s - 31\times 1.s,\ 3.s - 17\times 1.s,\ 4.s - 43\times 1.s\right)$$
$$= 25\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

(drugi i treći redak su jednaki).

2.7. Izračunaj determinantu petoga reda

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Koristit ćemo elementarne transformacije. Krenimo sa stupcem u kojem je dovoljno upotrijebiti samo dvije transformacije — trećim stupcem. Želimo postići

nule u drugom i četvrtom retku, a kao stožerni element biramo onaj iz petog retka.

$$D = \left(\textit{4.r}-4\times\textit{5.r},\ \textit{2.r}+3\times\textit{5.r}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Sada za stožer biramo prvi element drugoga retka.

$$D = \left(\textit{1.r}+2\times\textit{2.r},\ \textit{3.r}-3\times\textit{2.r},\ \textit{4.r}-2\times\textit{2.r}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix} = \left(\textit{1.r}+\textit{2.r},\ \textit{3.r}-\textit{2.r}\right) = 6\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 6\left(-13\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -17 & -13 \end{vmatrix}\right) = 6(-13\cdot 16-(-36)) = -1032.$$

2.3. Računanje determinanti n-toga reda

Ne postoji općeniti postupak koji bi bio koristan pri računu determinanti n-toga reda. Najčešće se koristimo svojstvima determinanti bilo u pokušaju da ih svedemo na trokutasti oblik, bilo na oblik pogodan za Laplaceov razvoj, bilo da uočimo vezu između determinante i sličnih determinanti manjega reda. Taj je problem složen i zahtijeva velik nivo apstrakcije da bi se uočile zakonitosti među elementima početne determinante i onih koje dobivamo u postupku računanja.

Osvrnut ćemo se na najčešće metode računanja ovih determinanti.

Svođenje na trokutastu formu. Determinantu svodimo na gornju (ili donju) trokutastu formu bilo rastavom po nekome retku, bilo koristeći elementarne transformacije.

2.8. Izračunaj sljedeće determinante reda n:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. a) Determinantu rastavljamo po prvom stupcu:

$$(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1&0&\dots&0&0\\0&1&\dots&0&0\\\vdots\\0&0&\dots&0&1\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}.$$

b) Determinantu rastavljamo po prvom stupcu

$$D=\alpha\begin{vmatrix}\alpha&\beta&0&\dots&0\\0&\alpha&\beta&\dots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots\\0&0&\dots&\alpha&\beta\\0&0&\dots&0&\alpha\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\beta\begin{vmatrix}\beta&0&0&\dots&0\\\alpha&\beta&0&\dots&0\\0&\alpha&\beta&\dots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots\\0&0&\dots&\alpha&\beta\end{vmatrix}$$
$$=\alpha^n+(-1)^{n+1}\beta^n.$$

2.9. Izračunaj sljedeće determinante:

a) $\begin{vmatrix}2&2&2&\dots&2\\2&3&2&\dots&2\\2&2&4&\dots&2\\\vdots\\2&2&2&\dots&n+1\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}2&4&6&\dots&2n\\-2&0&6&\dots&2n\\-2&-4&0&\dots&2n\\\vdots\\-2&-4&-6&\dots&0\end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix}1&3&5&\dots&2n-1\\1&2&5&\dots&2n-1\\1&3&4&\dots&2n-1\\\vdots\\1&3&5&\dots&2n-2\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&a_1&0&\dots&0\\1&0&a_2&\dots&0\\\vdots\\1&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. a)

$$D=\begin{pmatrix}\textit{od svakog retka osim}\\\textit{prvog oduzmemo prvi}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&2&\dots&2\\0&1&0&\dots&0\\0&0&2&\dots&0\\\vdots\\0&0&0&\dots&n-1\end{vmatrix}=2(n-1)!$$

(determinanta gornje trokutaste matrice).

b)

$$D=2^n\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\-1&0&3&\dots&n\\-1&-2&0&\dots&n\\\vdots\\-1&-2&-3&\dots&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\textit{svakom retku}\\\textit{dodamo prvi}\end{pmatrix}=2^n\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\0&2&6&\dots&2n\\0&0&3&\dots&2n\\\vdots\\0&0&0&\dots&n\end{vmatrix}=2^n n!.$$

c) Od svakoga retka oduzmemo prvi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

$\star$ d) Od prvog retka oduzmemo drugi podijeljen s a_1, zatim treći podijeljen s a_2 itd. Dobit ćemo trokutastu matricu:

$$D = \begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = -a_1 a_2 \cdots a_n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

2.10. Izračunaj determinante reda n:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \vdots & & & & & \\ -a & -a & -a & \dots & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. a) Prvom retku dodajmo zbroj preostalih i izlučimo potom zajednički faktor:

$$D = \begin{vmatrix} 2n-3 & 2n-3 & 2n-3 & \dots & 2n-3 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & -1 & \dots & 2 \\ \vdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Sada od svakog retka oduzimamo dvostruki prvi:

$$D = (2n-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 \end{vmatrix} = (-3)^{n-1}(2n-3).$$

b) 0. Prvom retku dodamo zbroj preostalih.

c) Od svakog retka (osim prvog) oduzmemo prvi redak pomnožen s x:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}.$$

Zbroj svih redaka osim prvog, podijeljen s x, dodajemo prvom retku:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}=(n-1)(-1)^{n-1}x^{n-2}.$$

d) Od svakog retka (osim prvog) oduzmemo prethodni

$$D=\begin{vmatrix} x & a & a & a & \dots & a \\ -a-x & x-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a-x & x-a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a-x & x-a \end{vmatrix}.$$

Sada prvom retku dodajemo zbroj preostalih redaka podijeljen s 2. Nakon toga determinantu rastavljamo po prvom retku.

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x-a) & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}(x+a) \\ -a-x & x-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a-x & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a-x & x-a \end{vmatrix}$$
$$=\tfrac{1}{2}(x-a)(x-a)^{n-1}+(-1)^{n+1}\tfrac{1}{2}(x+a)(-x-a)^{n-1}=\tfrac{1}{2}[(x-a)^n+(x+a)^n].$$

2.11. Izračunaj determinante reda n:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix};\qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. a) Prvom stupcu dodajemo preostale. Dobivenu determinantu razvijemo po prvom stupcu:

$$D = \begin{vmatrix} \sum a_i & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ -x & x & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} = x^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big).$$

b) Ova je determinanta općenitiji slučaj prethodne. Ukoliko nju izračunamo, uvrštavajući $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ dobit ćemo prethodni rezultat! Iz svakoga stupca izlučimo odgovarajuću nepoznanicu:

$$D = x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x_1} & \frac{a_2}{x_2} & \frac{a_3}{x_n} & \dots & \frac{a_n}{x_n} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sada smo dobili specijalni slučaj determinante iz a) , kod koje je $x = 1$! Dakako, moramo staviti $\frac{a_1}{x_1}$ umjesto a_1 i slično za ostale veličine:

$$D = x_1 x_2 \cdots x_n \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}\Big).$$

Korištenje rekurzijskih formula. Razvojem po nekom retku ili stupcu moguće je ponekad determinantu reda n izraziti s pomoću istih determinanti reda $n-1$. Ponavljajući tu formulu unatrag, dobivamo vrijednost tražene determinante.

2.12. Izračunaj determinante reda n:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Označimo tražene determinante s Δ_n.

a) Rastavom po prvom stupcu dobivamo

$$\Delta_n = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 - \Delta_{n-1}.$$

Iz ove jednakosti slijedi dalje

$$\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1} = 1 - (1 - \Delta_{n-2}) = \Delta_{n-2}.$$

Za osnovu uzimamo $n = 3$ (to je prvi n za koji determinanta ima karakterističan oblik koji vrijedi potom za svaki veći broj n):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Zato je $\Delta_{2n+1} = \Delta_3 = 1$. Za parne indekse vrijedi $\Delta_{2n} = \Delta_4 = 1 - \Delta_3 = 0$.

b) Ponovo rastavom po prvom stupcu pa potom po prvom retku dobivamo rekurzijsku relaciju $\Delta_n = -\Delta_{n-2}$. Kako je $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = 0$, to dobivamo $\Delta_{2n+1} = 0$, $\Delta_{2n} = (-1)^n$.

2.13. Izračunaj determinante reda n:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-\lambda \end{vmatrix}; \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Označimo traženu determinantu s Δ_n.

a) Determinantu možemo prikazati kao zbroj dviju determinanti, cijepajući posljednji stupac na zbroj dvaju stupaca:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

U prvoj determinanti ćemo od svakog retka oduzeti posljednji i tako dobiti trokutastu determinantu. Drugu determinantu rastavljamo po posljednjem stupcu.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & \dots & n-1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= n(-\lambda)^{n-1} - \lambda\Delta_{n-1}.$$

Vrijedi $\Delta_1 = 1 - \lambda$. Iterirajući ovu rekurzijsku relaciju dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= n(-\lambda)^{n-1} - \lambda[(n-1)(-\lambda)^{n-2} - \lambda\Delta_{n-2}] \\
&= (-\lambda)^{n-1}[n + (n-1)] + \lambda^2\Delta_{n-2} \\
&= (-\lambda)^{n-1}[n + (n-1) + (n-2)] - \lambda^3\Delta_{n-3} \\
&\ \vdots \\
&= (-\lambda)^{n-1}[n + (n-1) + \ldots + 2] + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\Delta_1 \\
&= (-\lambda)^{n-1}[n + (n-1) + \ldots + 2] + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(1-\lambda) \\
&= (-1)^n\left[\lambda^n - \lambda^{n-1}\frac{n(n-1)}{2}\right].
\end{aligned}$$

b) Istom transformacijom kao u prošlom primjeru dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= n\Delta_{n-1} + (n-1)! \\
&= n[(n-1)\Delta_{n-2} + (n-2)!] + n!\cdot\frac{1}{n} \\
&= n(n-1)[(n-2)\Delta_{n-3} + (n-3)!] + n!\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\
&\ \vdots \\
&= n!\Delta_1 + n!\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\
&= n!\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

* * *

2.14. Izračunaj Vandermondeovu determinantu

$$W(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Stavimo u ovoj determinanti nepoznanicu x umjesto broja x_n, i promotrimo je kao funkciju od x:

$$P(x) = W(x_1,\ldots,x_{n-1},x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Razvojem determinante po posljednjem stupcu zaključujemo da je $P(x)$ polinom stupnja $n-1$. Vrijedi $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_{n-1}) = 0$, jer odgovarajuće determinante imaju dva jednaka stupca. Zato je $P(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$, gdje je C vodeći koeficijent (uz potenciju x^{n-1}). U rastavu po posljednjem stupcu prepoznajemo taj koeficijent: to je identična determinanta reda $n-1$. Tako dobivamo

$$P(x) = W(x_1,\ldots,x_{n-1})(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

i odavde, stavljajući $x = x_n$,

$$\begin{aligned} W(x_1,\ldots,x_n) &= P(x_n) = (x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})W(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\ &= \prod_{i<n}(x_n-x_i)W(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\ &= \prod_{i<n}(x_n-x_i)\prod_{i<n-1}(x_{n-1}-x_i)W(x_1,\ldots,x_{n-2}) \\ &= \prod_{i<j}(x_j-x_i). \end{aligned}$$

* * *

U slučaju kada se determinanta reda n izražava pomoću determinanti reda $n-1$ i reda $n-2$, postupak je nešto složeniji. Pretpostavimo da determinante zadovoljavaju sljedeću rekurzijsku jednadžbu:

$$\Delta_n = p\Delta_{n-1} + q\Delta_{n-2} \tag{1}$$

gdje p i q ne ovise o n. Za nju kažemo da je **linearna rekurzijska jednadžba drugoga reda**. Pokažimo kako se nalazi njeno rješenje.

Najprije riješimo pripadnu **karakterističnu jednadžbu**

$$\lambda^2 = p\lambda + q.$$

Ova kvadratna jednadžba ima uvijek dva rješenja λ_1 i λ_2 (koja mogu biti i kompleksni brojevi). Sada razlikujemo dva slučaja:

1° $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Rješenje relacije (1) tada ima oblik

$$\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{2}$$

gdje su C_1 i C_2 dvije konstante koje nalazimo iz poznatih vrijednosti determinante Δ_n za $n = 1$ i $n = 2$ (ili pak $n = 2$ i $n = 3$). Te vrijednosti uvrstimo u (2) i iz dobivenog sustava odredimo C_1 i C_2.

2° $\lambda_1 = \lambda_2$. Rješenje relacije (1) tada ima oblik

$$\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n. \tag{3}$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo kao i prije.

2.15. Izračunaj vrijednost determinante n-toga reda $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. Razvijmo determinantu po prvom stupcu:

$$\Delta_n = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4\Delta_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Dobili smo sljedeću rekurzijsku relaciju drugoga reda:

$$\Delta_n = 4\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$\lambda^2 = 4\lambda - 3$$

s rješenjima $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Zato je

$$\Delta_n = C_1 3^n + C_2 \cdot 1^n = 3^n C_1 + C_2.$$

Za $n = 1$ vrijedi $\Delta_1 = 4$, za $n = 1$ dobivamo $\Delta_2 = 13$. Odavde

$$\left.\begin{aligned} 4 &= 3C_1 + C_2 \\ 13 &= 9C_1 + C_2 \end{aligned}\right\} \implies C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Tako dobivamo

$$\Delta_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

2.16. Fibonaccijev niz 1, 2, 3, 5, 8, 13,... definiran je formulom

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geqslant 3.$$

Dokaži da je n-ti član toga niza jednak determinanti n-toga reda

$$f_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Rastavljajući determinantu na potpuno isti način kao i u prethodnom zadatku, dobivamo rekurzijsku relaciju

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Vrijednosti determinante za male brojeve n dobivamo direktnim računanjem članova niza. Možemo napisati i formulu za opći član, koja slijedi rješavanjem pripadne karakteristične jednadžbe:

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Uvjerite se da su ovom formulom dani čalnovi Fibonaccijevog niza, uvrštavajući nekoliko početnih vrijednosti za broj n.

2.4. Zadaci za vježbu

2.17. Izračunaj determinante (razvojem po pogodnom retku ili stupcu):

a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2.18. Izračunaj determinante (Laplaceovim razvojem po pogodnom retku ili stupcu!):

a) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$.

2.19. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2.20. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.21. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}; \text{b)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

2.22. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -4 & -8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.23. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \text{c)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.24. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2.25. Izračunaj determinante:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

* * *

2.26. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 131 & 231 \\ -130 & -230 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 2 & \sin^2\beta & -\cos^2\beta \\ 2 & \sin^2\gamma & -\cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

2.27. Izračunaj determinantu $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

2.28. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

2.29. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

2.30. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 0 & c & -b & x \\ -c & 0 & a & y \\ b & -a & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

2.31. Odredi nužne uvjete da bi sljedeća jednakost bila istinita

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

2.32. Dokaži identitete

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)$.

2.33. Dokaži relaciju $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+bc+ca & abc \\ 1 & b+c+d & bc+cd+db & bcd \\ 1 & c+d+a & cd+da+ac & cda \\ 1 & d+a+b & da+ab+bd & dab \end{vmatrix}$.

2.34. Dokaži da determinanta $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & 1 & a & a^2 \\ x & a^3 & 1 & a \\ y & z & a^3 & 1 \end{vmatrix}$ ne ovisi o x, y, z.

2.35. Matrica $\mathbf{A}$ je **ortogonalna** ako vrijedi $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Pokaži da njena determinanta iznosi 1 ili -1. Vrijedi li obrat?

2.36. Kompleksna matrica je **unitarna** ako vrijedi $\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{U}^* = \overline{\mathbf{U}}^T$). Pokaži da za determinantu unitarne matrice vrijedi $|\det \mathbf{U}| = 1$.

2.37. Izračunaj determinantu od $(-\mathbf{A})$. Koristeći taj rezultat izračunaj determinantu antisimetrične matrice neparnog reda.

2.38. Kako se mijenja determinanta reda n ako joj stupce (ili retke) složimo u suprotnom poretku?

2.39. 'Drugu' dijagonalu kvadratne matrice čine elementi s indeksima $(n,1)$, $(n-1,2),\ldots,(2,n-1)$, $(1,n)$. Kako se mijenja determinanta ako je zrcalimo oko druge dijagonale?

2.40. Koje su od sljedećih jednakosti istinite za bilo koje kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ reda n: **a)** $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det\mathbf{A} + \det\mathbf{B}$; **b)** $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\det\mathbf{A}$; **c)** $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n\det\mathbf{A}$; **d)** $\det(\mathbf{A}^k) = (\det\mathbf{A})^k$.

2.41. Neka su $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_k$ kvadratne matrice i $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$ blok-dijagonalna matrica. Dokaži da je $\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}_1 \cdots \det\mathbf{A}_k$.

2.42. Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ kvadratne matrice i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$. Pokaži da je $\det\mathbf{D} = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

2.43. Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{I}$ kvadratne matrice, $\mathbf{I}$ jedinična. *Dokaži da vrijedi:*

a) $\det \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{D} - \mathbf{BC})$;

b) $\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A} - \mathbf{BC})$;

c) $\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{cases} \det(\mathbf{DA} - \mathbf{CB}) \text{ ako je } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \\ \det(\mathbf{AD} - \mathbf{CB}) \text{ ako je } \mathbf{AC} = \mathbf{CA} \end{cases}$

(uz dodatnu pretpostavku da su sve $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ kvadratne istog reda i da je $\mathbf{A}$ regularna).

2.44. Elementi determinante drugoga reda diferencijabilne su funkcije. Pokaži da vrijedi

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Kako izgleda analogna formula za determinantu n-toga reda?

* * *

2.45. Izračunaj determinantu reda n ako su njezini elementi

a) $a_{ij} = \min\{i,j\}$; b) $a_{ij} = \max\{i,j\}$;

c) $a_{ij} = |i-j|$; d) $a_{ij} = |i-j| + 1$.

2.46. Izračunaj determinante

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & x & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & x & 3 & \dots & 3 \\ \vdots \\ n & n & n & n & \dots & x \end{vmatrix}$; b) $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x & \dots & 3 & 3 \\ \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & x & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$.

2.47. Izračunaj determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$.

2.48. Izračunaj determinante n-tog reda:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & \lambda_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

2.49. Izračunaj determinante n-tog reda:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ & & & \ddots & & \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \vdots & & & & & \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (n paran).

2.50. Izračunaj determinante n-tog reda:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ & \vdots & & \ddots & \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ & & \ddots & & \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 2 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

2.51. Izračunaj determinante n-tog reda:

a) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ & \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ & & & \ddots & \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

2.52. Izračunaj (rekurzijskim formulama) determinante n-tog reda:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

3.

Rang i inverz matrice

3.1. Rang matrice

Elementarne transformacije nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka,
- množenje retka skalarom različitim od nule,
- dodavanje nekog retka nekom drugom retku.

Uzastopnom primjenom posljednje transformacije uočavamo da u elementarnu transformaciju spada i dodavanje nekom retku linearne kombinacije preostalih redaka.

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumjevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul element (stožer) svakoga retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku i_1 leži u stupcu j_1, a stožer u retku $i_2 > i_1$ leži u stupcu j_2, tada je $j_2 > j_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga obično slovom r i pišemo $r(A) = r$. Ako je matrica A tipa $m \times n$, tada je uvijek $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

Rang matrice se podudara s najvećim redom nekog minora koji je različit od nule.

Neka je **A** kvadratna matrica reda n. Njen je rang jednak n onda i samo onda kad je njena determinanta različita od nule. Reducirana forma takve kvadratne matrice jedinična je matrica.

3.1. Svedi na reducirani oblik i odredi rang matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{prvi redak} \times(-2) \\ \textit{dodajemo drugom} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{drugi redak} \\ \textit{dijelimo s } -4 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{drugi redak} \times(-2) \\ \textit{dodajemo prvom} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{treći redak} \\ \textit{dijelimo s 2} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente u} \\ \textit{trećem stupcu} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 3.$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{zamjenjujemo} \\ \textit{prvi i treći} \\ \textit{redak} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{drugog stupca} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dijelimo} \\ \textit{drugi redak s 3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{r}(\mathbf{B}) = 2.$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{trećeg stupca} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dijelimo prvi redak s 2} \\ \textit{drugi s -1} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{r}(\mathbf{C}) = 2.$$

3.2. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ nađi rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Ne traži se reducirana forma pa zbog jednostavnijeg računanja smijemo zamijeniti stupce (to neće promijeniti rang matrice):

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & 15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz ovog oblika zaključujemo da je $r(A) = 2$ ako je $\lambda = 0$ te $r(A) = 3$ inače.

3.3. U ovisnosti o parametru $\alpha \in \mathbf{R}$ nađi rang matrice

$$\text{a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \alpha \end{bmatrix}; \text{ b)}\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. a) Rang matrice jednak je redu najveće minore koja je različita od nule. Kako je za svaku vrijednost parametra α determinanta matrice jednaka nuli (prvi i drugi redak su proporcionalni), to je rang sigurno manji od 3. Međutim, determinanta minore $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ iznosi 9, različita je od nule i stoga je rang matrice 2, neovisno o vrijednosti parametra α.

b) Determinanta matrice iznosi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha^2-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha-1)^2\alpha(\alpha+2).$$

Ova je determinanta jednaka nuli samo za $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ i $\alpha = -2$. Za sve ostale vrijednosti različita je od nule te je rang matrice jednak 3.

Za $\alpha = 1$ sva su tri retka jednaka — rang matrice jednak je 1. Za $\alpha = 0$, prva glavna minora $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ različita od nule te je rang jednak 2. Za $\alpha = -2$ ista minora iznosi $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ i rang je ponovo jednak 2.

3.4. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ nađi rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3-\lambda & \dots & n \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-\lambda \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Za $\lambda = 1$ taj je rang očevidno 1, pošto su svi retci (i stupci) proporcionalni te je svaka minora reda 2 jednaka nuli.

Da odredimo rang matrice za preostale vrijednosti, izračunat ćemo njenu determinantu. (To je učinjeno u zadatku 2.13, no ovdje ćemo primijeniti drukčiji račun.) Oduzimajući prvi redak od svih preostalih dobivamo determinantu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Dodajmo sada sve stupce od drugoga do posljednjeg prvom stupcu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

gdje se na mjestu zvjezdice nalazi element

$$(1-\lambda) + 2 + 3 + \dots + n = -\lambda + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Determinanta je stoga jednaka umnošku

$$\Delta = \Big(\frac{n(n+1)}{2} - \lambda\Big)(-\lambda)^{n-1}$$

i jednaka je nuli samo za $\lambda = 0$ i za $\lambda = \frac{n(n+1)}{2}$. U prvom slučaju rang je jednak 1, a u drugom on iznosi $n-1$. Naime, glavna minora reda $n-1$ za ovu vrijednost broja λ različita je od nule! (Ona je jednaka nuli ako je $\lambda = \frac{(n-1)n}{2}$.) Za sve ostale vrijednosti λ rang je n.

3.5. Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 14 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Pomnoži je redom sa sljedećim elementarnim matricama i uvjeri se da su tim množenjima opisane

elementarne transformacije:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Računajući redom tražene umnoške dobivamo

$$A_1 = E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 15 & 8 \\ 2 & 0 & 14 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 14 & 8 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{zamjenjeni prvi i treći redak}\right),$$

$$A_2 = E_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 14 & 8 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{prvi redak} \times(-2) \textit{ dodan drugom}\right);$$

$$A_3 = E_3 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & 15 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{prvi redak} \times(-3) \textit{ dodan trećem}\right),$$

$$A_4 = E_4 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{drugi redak podijeljen s } 2\right),$$

$$A_5 = E_5 A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{drugi redak dodan prvom}\right),$$

$$A_R = E_6 A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\textit{drugi redak} \times(-1) \textit{ dodan trećem}\right).$$

3.6. Matricu $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ svedi na reducirani oblik. Nakon svake transformacije odredi elementarnu matricu pomoću koje je ona dobivena (množenjem slijeva!).

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \qquad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \qquad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matricu $\mathbf{E} = \mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1$ i uvjeri se matričnim množenjem da vrijedi $\mathbf{A}_R = \mathbf{EA}$.

3.7. Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Svedi je na reducirani oblik. Izračunaj umnožak $\mathbf{E}$ pritom korištenih elementarnih matrica.

RJEŠENJE.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neposrednim množenjem dobivamo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvjeri se množeći matrice da vrijedi $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

3.2. Inverzna matrica

Za kvadratnu matricu A kažemo da je **regularna** ako postoji matrica, označavamo je s A^{-1}, za koju vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Matricu A^{-1} nazivamo **inverzna** matrica. Kvadratna matrica reda n je regularna ako i samo ako joj je rang jednak n.

Inverznu matricu računamo svođenjem na reducirani oblik. Ako je A kvadratna matrica punoga ranga, njen reducirani oblik jednak je jediničnoj matrici. Umnožak $E_n \cdots E_2E_1$ pritom korištenih elementarnih matrica daje upravo inverznu matricu (vidi posljednji zadatak).

Umjesto da se na kraju postupka računa umnožak elementarnih matrica, čitav se postupak sprovodi na tzv. proširenoj matrici koja se sastoji u lijevom dijelu od matrice A, a u desnom od jedinične matrice I. Elementarne transformacije daju niz matrica oblika

$$[A \mid I] \sim [A_1 \mid E_1] \sim [A_2 \mid E_2E_1] \sim \ldots \sim [I \mid E_n \cdots E_1]$$

te se na koncu postupka s desne strane nalazi upravo tražena inverzna matrica.

3.8. Odredi inverz matrice $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Iz proširene matrice $[A \mid I]$ elementarnim transformacijama nad retcima trebamo dobiti oblik $[I \mid A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \textit{prvi redak} \\ \textit{dijelimo s } -3 \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{množimo treći} \\ \textit{redak s 3} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{drugog stupca} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{trećeg stupca} \end{pmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Dobili smo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

3.9. Elementarnim transformacijama odredi inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Računamo kao u prošlom zadatku:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{matrix}\textit{zamjenjujemo} \\ \textit{prvi i drugi} \\ \textit{redak}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{prvog stupca}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{drugog stupca}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{treći redak} \\ \textit{dijelimo s } -2\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{trećeg stupca}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{četvrti redak} \\ \textit{dijelimo s } -\frac{3}{2}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{matrix}\textit{poništavamo} \\ \textit{elemente} \\ \textit{četvrtog stupca}\end{matrix}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.10. Odredi inverz za opću matricu drugog reda $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pretpostavljajući da je ona regularna.

RJEŠENJE. Da bi ova matrica bila regularna a i c ne mogu istovremeno biti nule. Pretpostavimo neka je $a \neq 0$ (u protivnom zamijenimo prvi i drugi redak). Proširimo matricu jediničnom i primjenjujemo elementarne transformacije:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \textit{dijelimo} \\ \textit{prvi redak s } a \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{prvi redak} \times (-c) \\ \textit{dodajemo drugom} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - c\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{dijelimo drugi} \\ \textit{redak s } \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textit{drugi redak} \times (-\frac{b}{a}) \\ \textit{dodajemo prvom} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Primijeti da je matrica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ regularna ako i samo ako je $ad - bc \neq 0$, tj. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

3.11. Riješi matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. *1. način.* Matrica $\mathbf{X}$ mora biti tipa 2×2 pa uzmimo $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobivamo dva sustava

$$\begin{cases} a + 3c = 3, \\ 3a + 4c = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 3d = 5, \\ 3b + 4d = 9, \end{cases}$$

čija rješenja su $a = \frac{3}{5}, c = \frac{4}{5}, b = \frac{7}{5}, d = \frac{6}{5}$. Slijedi $\mathbf{X} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

2. način. Jednakost $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, množimo slijeva s A^{-1} (A je regularna) pa imamo

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Računamo $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ pa je

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.3. Cramerovo pravilo za računanje inverza matrice

Elemente matrice A^{-1} možemo izraziti eksplicitnom formulom:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} A_{ji}.$$

Ovdje je A_{ji} algebarski komplement elementa a_{ji}, $A_{ji} := (-1)^{i+j} M_{ji}$. Dakle:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \qquad (*)$$

Ova se formula naziva **Cramerovo pravilo.** Efikasna je za matrice drugoga i trećega reda. Za matrice većega reda treba (u principu) koristiti Gaussov postupak.

3.12. Odredi inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Koristiti ćemo formulu $(*)$

Najprije treba provjeriti postoji li inverzna matrica! Izračunat ćemo $\det A$ jer nam je ta determinanta ionako potrebna u gornjoj formuli.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 - (-3 - 3 + 16) = 2.$$

Determinanta je različita od nule, stoga postoji inverzna matrica. Za matricu reda 3 najpraktičnije je odmah formirati (veliku!) matricu reda 3 čiji su elementi algebarski komplementi. Primijeti da se predznaci ispred minora mijenjaju na isti način kao i pri računanju determinante razvojem po retku ili stupcu. Također, praktičnije je

transponiranje matrice načiniti u drugome koraku:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}-1&-1\\3&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\-1&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{T}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-9&7\\1&1&-1\\1&7&-5\end{bmatrix}^{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&1\\-9&1&7\\7&-1&-5\end{bmatrix}.$$

3.4. Zadaci za vježbu

3.13. Nađi rang matrica:

a) $\begin{bmatrix}2&-1\\3&0\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}-1&3\\2&6\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&3\end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix}1&-4&8\\3&-2&4\\4&-6&12\end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix}-1&2&0&1&4\\1&2&3&-1&5\\0&4&3&0&9\end{bmatrix}$;

h) $\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&0&1&3&4\\0&0&-1&2&3\\0&0&1&0&3\end{bmatrix}$.

3.14. Nađi rang matrica:

a) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&-1&2&5\\4&1&5&0\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1&2&5&3\\-1&3&-1&2\\1&12&13&13\\1&7&9&8\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}2&3&-1&4\\1&0&1&2\\3&4&0&7\\-2&-1&4&1\\4&-2&3&5\end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 10 & 18 & -7 & 10 & 15 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.15. Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbf{R}$ je rang matrice $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ jednak a) 1; b) 2; c) 3 ?

3.16. Odredi parametar $\lambda \in \mathbf{R}$ tako da rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 & 13 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ \lambda & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ bude 3.

3.17. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ odredi rang matrice

a) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & 11 & -6 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

3.18. Provjeri direktno na matricama $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ da za rang vrijede nejednakosti $r(\mathbf{AB}) \le r(\mathbf{A})$ i $r(\mathbf{AB}) \le r(\mathbf{B})$.

* * *

3.19. Izračunaj (Cramerovim pravilom) inverz sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.20. Izračunaj inverznu matricu za matrice:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

3.21. Odredi inverz sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.22. Odredi inverz sljedećih matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

3.23. Izračunaj inverz matrica reda n:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

3.24. Izračunaj nepoznatu matricu $\mathbf{X}$:

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};$$

b)
$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix};$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3.25. Pokaži da dijagonalna matrica reda n sa elementima $d_1, d_2, \ldots, d_n$ na dijagonali ima inverz ako i samo ako je $d_i \neq 0, \forall i$. Kako glasi njen inverz?

3.26. Kako se mijenja inverz matrice ako u matrici:
a) zamijenimo i-ti i j-ti redak;
b) pomnožimo i-ti redak s λ;
c) i-tom retku dodamo j-ti pomnožen s λ.

3.27. Dokaži da je inverz simetrične matrice simetrična matrica, antisimetrične matice antisimetrična.

3.28. Matrična se jednadžba ne smije skraćivati. Odredi primjer matrica $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$ drugoga reda takvih da je $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Što se događa ako je $\mathbf{A}$ regularna?

3.29. Ako matrica $\mathbf{A}$ zadovoljava jednadžbu $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ onda je regularna. Dokaži! Kako glasi njen inverz?

3.30. Matrica je **idempotentna** ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Dokaži da je idempotentna matrica regularna onda i samo onda ako je jedinična.

3.31. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ matrice sa svojstvom $2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Dokaži da je matrica $\mathbf{A}$ idempotentna onda i samo onda ako je matrica $\mathbf{B}$ involutorna.

3.32. Ako za matricu $\mathbf{A}$ vrijedi $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ ($\mathbf{A}$ je nilpotentna), pokaži da je $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ regularna te da vrijedi

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}.$$

3.33. Dokaži da vrijedi: a) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; b) $(\mathbf{A}^{-1})^k = (\mathbf{A}^k)^{-1}, k \in \mathbf{N}$. Opovrgni: c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$.

3.34. Ako matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju dokaži da i $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ komutiraju sve međusobno.

3.35. Neka je $f(t)$ polinom u t. Dokaži da je $f(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}) = \mathbf{S}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{S}$ za regularnu matricu $\mathbf{S} \in \mathcal{M}_n$ i bilo koju matricu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$.

3.36. Dokaži da za ortogonalnu matricu $\mathbf{A}$ ($\mathbf{AA}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}$) vrijedi:
a) matrica $\mathbf{A}^{-1}$ također ortogonalna;
b) produkt ortogonalnih matrica je ortogonalna matrica;
c) matrica $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ je ortogonalna.

3.37. Dokaži da za unitarnu matricu $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}$ je kompleksna i $\mathbf{UU}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$) vrijedi:
a) matrica $\mathbf{U}^{-1}$ je također unitarna;
b) produkt unitarnih matrica je unitarna matrica.

3.38. Ako matrica posjeduje neka dva od sljedećih svojstava
(1) $\mathbf{A}$ je simetrična,
(2) $\mathbf{A}$ je ortogonalna,
(3) $\mathbf{A}$ je involutorna,
onda nužno posjeduje i treće.

4. Sustavi linearnih jednadžbi

Linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo u obliku

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right. \tag{1}$$

Ovdje su a_{ij}, b_i zadani brojevi, a $x_1, \ldots, x_n$ *nepoznanice* sustava. Rješenje ovoga sustava je svaka n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$ koja uvrštena u (1) identički zadovoljava sve jednadžbe.

4.1. Gaussova metoda eliminacije

Linearni sustav možemo predočiti u obliku **proširene matrice** sustava

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Taj se sustav rješava tako da se svede na ekvivalentan u kojemu matrica ima reducirani oblik. Pri tom se smiju koristiti identične **elementarne transformacije** kao i pri određivanju reducirane forme matrice:

- zamjena dvaju redaka,
- množenje retka skalarom različitim od nule,
- dodavanjem nekom retku drugoga retka pomnoženog skalarom različitim od nule.

One se primjenjuju na proširenoj matrici sustava. Rješenje sustava će postojati ako matrica i proširena matrica sustava imaju isti rang. Iz reduciranog oblika se očitava rješenje izborom po volji odabranih vrijednosti za slobodne nepoznanice te potom određivanjem vrijednosti vezanih nepoznanica.

4.1. Gaussovom metodom riješi sustav

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5, \\ 2x - y - z &= 1, \\ x + 3y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

RJEŠENJE. Sustav pišemo u matričnom obliku koristeći proširenu matricu $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$. Nakon toga matricu $\mathbf{A}$ svodimo na reducirani oblik.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -9 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Rang matrice jednak je rangu proširene matrice i iznosi 3. Rješenje sustava je jedinstveno. Čitamo ga direktno iz reduciranog oblika: $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

4.2. Gaussovom metodom riješi sustave:

a) $\begin{cases} 3x - y + 3z = 4, \\ 6x - 2y + 6z = 1, \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ -2x + z = -2, \\ x + 2y - z = 3, \\ -x + 2y + 12z = 1. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) Pri postupku svođenja na reduciranu formu nije obvezno na mjestu stožernog elementa imati broj jednak 1. Dovoljno je zadržati bilo koji ne-nul element. U ovom primjeru zadržavamo broj 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & \frac{17}{3} & -5 & -\frac{14}{3} \end{array}\right].$$

Iz drugoga retka čitamo da sustav nema rješenja. Rang matrice $\mathbf{A}$ je 2, rang proširene 3.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Postupak svođenja na reducirani oblik u ovom se primjeru neznatno razlikuje od dosadašnjih. Opredijelili smo se da u prvom koraku *matricu* $\mathbf{A}$ *svedemo na gornji trokutasti oblik*, kako bismo uz minimalni broj operacija ustanovili da li sustav uopće ima rješenja.

Iz ovoga oblika čitamo $r(\mathbf{A}) = 3$, baš kao i rang proširene matrice. Sada nastavljamo postupak svođenja matrice $\mathbf{A}$ na reducirani oblik. Taj se korak naziva *obratni*

hod. Posljednji redak matrice (ispunjen nulama) ne moramo prepisivati.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava glasi $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

4.3. Riješi sustav

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4. \end{aligned}$$

RJEŠENJE. Pri svođenju na reducirani oblik dozvoljeno je zamijeniti stupce matrice A (ali nikako s proširenim stupcem!). Zamjena stupaca odgovara promjeni poretka nepoznanica: svaki stupac odgovara točno jednoj nepoznanici i pri zamjeni stupaca moramo naznačiti kojoj nepoznanici odgovara koji stupac. U ovoj matrici zamijenit ćemo (radi jednostavnijeg računa!) prvi i treći stupac.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & \vdots & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & -4 & -7 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}.$$

Sustav nema rješenja.

4.4. Riješi sljedeće homogene sustave

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ 3x + y + 5z = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) Proširenu matricu svodimo na reducirani oblik. Kako je desna strana nul-vektor, sustav će uvijek imati rješenje. Dvije su mogućnosti: postoji samo trivijalno rješenje, ili, postoji beskonačno mnogo rješenja.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 5 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 4 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Prve dvije nepoznanice su vezane, dok je treća slobodna. Nju biramo po volji: $z = \lambda$. Nakon toga određujemo vrijednost prvih dviju: $x = -2z = -2\lambda$, $y = z = \lambda$. Rješenje zapisano u vektorskom obliku glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Zamijenimo prvi s drugim retkom i nastavimo svođenje na reducirani oblik

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -5 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 0 & -5 & 13 & 0\\ 0 & -5 & 13 & 0\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 0 & -5 & 13 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -5 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & 0\end{array}\right].$$

Izaberimo slobodnu nepoznanicu na način $z = 5\lambda$. Tada slijedi $x = -\frac{1}{5}z = -\lambda$, $y = \frac{13}{5}z = 13\lambda$. dakle

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda\\ 13\lambda\\ 5\lambda\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-1\\ 13\\ 5\end{bmatrix}.$$

4.5. Riješi homogene sustave:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\\ 2x_1 + x_2 = 0.\end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0.\\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0.\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.\end{cases}$

RJEŠENJE. a) Proširenu matricu sustava svodimo na reducirani oblik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -4 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Uzmimo neka je $x_3 = \lambda$. Tada iz reduciranog oblika prosirene matrice sustava slijedi da je $x_2 = -2x_3 = -2\lambda$, odnosno $x_1 = x_3 = \lambda$. Rjesenje u vektorskom obliku je

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda\\ -2\lambda\\ \lambda\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}.$$

b) Zamijenimo prvi i četvrti redak i radimo elementarne transformacije:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Uzmimo neka je $x_4 = \lambda$. Iz reduciranog oblika je $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = -x_4 = -\lambda$. Rješenje u vektorskom obliku je

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda\\ 0\\ 0\\ \lambda\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

4.6. Gaussovom metodom riješi sustave:

a) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ 9x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=5, \\ x_1-x_2-x_4+2x_5=1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$

RJEŠENJE. a)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -12 & -4 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right].$$

Rang matrice jednak je rangu proširene matrice i iznosi 3 pa rješenje postoji. $n-r(\mathrm{A}) = 5-3 = 2$ pa izaberemo dvije slobodne nepoznanice $x_4 = \alpha$ i $x_5 = \beta$. Iz reduciranog oblika proširene matrice očitavamo $x_3 = -3+10x_5-6x_4 = -3+10\beta-6\alpha$, $x_2 = -1+4x_5-2x_4 = -1+4\beta-2\alpha$, $x_1 = 2x_5-x_4 = 2\beta-\alpha$. U vektorskom obliku:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta-\alpha \\ -1+4\beta-2\alpha \\ -3+10\beta-6\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Zamijenimo u prvom koraku prvi i drugi redak

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Rang matrice i rang proširene matrice su 2 pa rješenje postoji. $n-r(\mathrm{A}) = 5-2 = 3$ pa izaberemo tri slobodne nepoznanice $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $x_5 = 3\gamma$. Iz reduciranog oblika je $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_5 + x_4 + x_3 = \frac{1}{3} - 5\gamma + \beta + \alpha$ i $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5 = \frac{1}{3} + \gamma$. U

vektorskom obliku rješenje je:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\gamma \\ \frac{1}{3}+\alpha+\beta-5\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ 3\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4.7. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustave:

a) $\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 4, \\ 2x + y + 2z = 5, \\ 3x + 2y + 3z = 12. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) Zamijenimo 1. i 3. stupac. To odgovara zamjeni varijabli x i z.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & -3 & 2-2\lambda & -3 \\ 0 & -4 & 3-3\lambda & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & -4 & 3-3\lambda & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\lambda+2 & 10 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -12 \end{array}\right].$$

Razlikujemo slučajeve:

1) Za $\lambda = 1$ rang matrice je 2, a rang proširene matrice 3 pa sustav u tom slučaju nije rješiv.

2) Za $\lambda \neq 1$ rang matrice i rang prošorene matrice se podudaraju i iznose 3 pa je sustav rješiv. Rješenje je (zamijenili smo na početku x i z!):

$$x = \frac{12}{1-\lambda}, \qquad y = 9, \qquad z = -2 - x = -2 - \frac{12}{1-\lambda}.$$

b) Zamijenimo prvi i treći redak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^2 \end{array}\right].$$

1) Ako je $\lambda = 1$ sustav se svodi na $x+y+z = 1$ čije rješenje je dvoparametarsko: $y = \alpha, z = \beta, x = 1 - \alpha - \beta$.

Za $\lambda \neq 1$ nastavljamo dalje sa elementarnim transformacijama. Sada smijemo podijeliti drugi redak sa $\lambda - 1$ i treći sa $1 - \lambda$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 1+\lambda \end{array}\right].$$

Nadalje imamo slučajeve:

2) Za $\lambda = -2$ rang matrice je 2, rang proširene matrice je 3 i sustav nije rješiv.

3) Za $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$ rang matrice i proširene matrice su 3 pa je rješenje:

$$z = \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \qquad y = z = \frac{1+\lambda}{2+\lambda}, \qquad x = -1 + z = -1 + \frac{1+\lambda}{2+\lambda} = \frac{-1}{2+\lambda}.$$

4.8. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustave:

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ \lambda x_2 + 2x_3 + (\lambda-1)x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (\lambda+1)x_4 = 1+\lambda, \\ -x_1 + (\lambda-1)x_2 + \lambda x_4 = -1-\lambda. \end{cases}$$

RJEŠENJE. a) Zamijenjujemo 1. i 3. i zatim 2. i 3. stupac. Time smo ciklički zamijenili prve tri nepoznanice pa sada imamo redom x_3, x_1, x_2, x_4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 14 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & \lambda & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -9 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -18 & \lambda-9 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -18 & \lambda-9 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Razlikujemo slučajeve:

1) Za $\lambda = 1$ rang matrice je 2, a rang proširene matrice je 3 pa sustav nije rješiv.

2) Za $\lambda \neq 1$ rješenje je:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{5}{\lambda - 1}, \\ x_2 &= 2\alpha, \\ x_1 &= 1 - 2x_4 - \frac{9}{2}x_2 = 1 - \frac{10}{\lambda - 1} - 9\alpha, \\ x_3 &= x_4 + 4x_2 = \frac{5}{\lambda - 1} + 8\alpha. \end{aligned}$$

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda+1 & 1+\lambda \\ -1 & \lambda-1 & 0 & \lambda & -1-\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1+\lambda & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \end{array}\right].$$

Imamo slučajeve:

1) Za $\lambda = -2$ rang matrice i rang proširene matrice se podudaraju i iznose 3. Rješenje je jednoparametarsko:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2) Za $\lambda = 0$ lako se vidi da je rang matrice 3, a rang proširene matrice 4 pa je u ovom slučaju sustav nerješiv.

3) Za $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -2$ rang matrice i rang proširene matrice su 4 pa je rješenje jedinstveno i iznosi:

$$x_1 = \lambda - 1 + \frac{2}{\lambda}, \qquad x_2 = -\frac{2}{\lambda}, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 0.$$

4.2. Cramerovo pravilo

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna regularna matrica ($D = \det \mathbf{A} \neq 0$). i-ta komponenta rješenja sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ glasi

$$x_i = \frac{D_i}{D}. \tag{2}$$

Ovdje je D_i determinanta matrice koju dobijemo tako da se u matrici $\mathbf{A}$ zamijeni i-ti stupac s vektorom $\mathbf{b}$:

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

U slučaju manjeg broja nepoznanica, uobičajeno je indekse determinanti označavati imenima nepoznanica.

4.9. Cramerovim pravilom riješi sustav

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

RJEŠENJE. Determinanta sustava je $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$. $D \neq 0$ pa postoji jedinstveno rješenje. U determinanti D_x prvi stupac determinante D zamijenjen je sa stupcem slobodnih članova. Slično i za D_y i D_z.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

Rješenje je $x = \dfrac{D_x}{D} = 1$, $\quad y = \dfrac{D_y}{D} = -1$, $\quad z = \dfrac{D_z}{D} = 2$.

4.10. Cramerovim pravilom riješi sustave:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 3. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) Determinanta sustava je $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, dakle $D \neq 0$ i sustav je homogen pa postoji jedinstveno trivijalno rješenje $x = y = z = 0$.

b) Determinanta sustava je $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$ Nadalje

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

Rješenje je $x = 5$, $y = 6$, $z = 10$.

c) Determinanta sustava je $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ i sustav nema jedinstvenog rješenja. Moguća su dva slučaja: sustav nema nikakvoga rješenja, ili, sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Želimo li ispitati koja je od ovih dviju mogućnosti istinita, praktičnije je preći na Gaussov algoritam. Analiza s pomoću determinanti je složena, nepregledna i ponekad neizvediva. U ovome bi slučaju izgledala ovako:

Izračunamo najprije sve determinante D_x, D_y, D_z. Ukoliko je barem jedna od njih različita od nule, sustav nema rješenja. Kod nas je

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

U ovom je slučaju još uvijek moguće da sustav i ima kao i da nema rješenja.

Retci proširene matrice linearno su zavisni (sve determinante trećega reda jednake su nuli). Kako su prva dva retka linearno nezavisna, to je treći njihova kombinacija i stoga treću jednadžbu možemo zanemariti. Tako dobivamo sustav

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y + z = 2. \end{cases}$$

Vidimo da su svaka dva stupca linearno nezavisna. To znači da bilo koje dvije varijable možemo uzeti kao vezane varijable, dok će treća biti slobodna. Odaberimo za slobodnu varijablu y i uzmimo njenu vrijednost po volji $y = \lambda$ pa imamo

$$\begin{cases} x + z = 1+2\lambda, \\ 2x + z = 2+\lambda. \end{cases}$$

Sada rješenje možemo dobiti Cramerovim pravilom:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - \lambda, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ 2 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 3\lambda.$$

Zapisano u vektorskom obliku: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4.11. Riješi sustave Cramerovim pravilom:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 11, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

RJEŠENJE. Izračunajte pet determinanti reda 4 i uvjerite se da je jednostavnije koristiti Gaussov algoritam.

a) Determinanta sustava je $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -5 & 3 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -303$. Rješenje je jedinstveno. $D_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -5 & 3 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 11 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -303$, $D_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 5 & 6 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & 6 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -606$, $D_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 2 \\ -3 & -2 & 11 & -4 \\ 3 & 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -303$, $D_{x_4} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 6 \\ -3 & -2 & 6 & 11 \\ 3 & 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 909$. Dakle, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

b) Determinanta sustava u ovom slučaju je $D = 0$, dok je $D_{x_1} = 144 \neq 0$. Slijedi da sustav nema rješenja.

4.12. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$

a) odredi kada sustav $\begin{cases} \lambda x + 3y = 3, \\ x - y = 7. \end{cases}$ nije rješiv,

b) diskutiraj rješenja sustava $\begin{cases} \lambda x + 4y = 2, \\ 9x + \lambda y = 3. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) Determinanta sustava je $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 3$. Da sustav ne bude rješiv mora biti $D = 0$ i bar jedan od D_x i D_y različit od 0. Dakle, $-\lambda - 3 = 0$ tj. $\lambda = -3$ i to je dovoljno jer je $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

b)

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 9 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 36, \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 12, \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 18.$$

Imamo slučajeve:

1) $\lambda \neq 6, \lambda \neq -6$. Tada je

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2\lambda - 12}{\lambda^2 - 36} = \frac{2}{\lambda + 6},$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{3\lambda - 18}{\lambda^2 - 36} = \frac{3}{\lambda + 6}.$$

2) $\lambda = -6$. Tada je $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ pa sustav nema rješenja.

3) $\lambda = 6$. Tada je $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$. Rješenje je jednoparametarsko $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4.13. Dokaži da za bilo koje realne i različite brojeve x_0, x_1, ..., x_n i bilo koje realne brojeve y_0, y_1, ..., y_n postoji jedinstveni polinom $P(x)$ stupnja manjeg ili jednakog n tako da je

$$P(x_0) = y_0, \qquad P(x_1) = y_1, \qquad \ldots, \qquad P(x_n) = y_n.$$

RJEŠENJE. Polinom tražimo u obliku $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Uvjeti zadataka vode na sustav

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1, \\ a_0 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_2^n = y_2, \\ \ldots \\ a_0 + a_2 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases}$$

s nepoznanicama a_0, a_1, ..., a_n. Determinanta sustava ima oblik

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Ova je determinanta identična Vandermondeovoj determinanti $W(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ reda $n+1$ (jer se transponiranjem njena vrijednost ne mijenja). Dakle, $\Delta = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Zbog $x_i \neq x_j$ za različite i i j su svi faktori u izrazu za Δ različiti od nule pa je i $\Delta \neq 0$. Slijedi da su a_0, a_1, ..., a_n (rješenja sustava) jedinstveni pa je to i $P(x)$.

4.3. Zadaci za vježbu

4.14. Riješi homogene sustave:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4.15. Riješi homogene sustave:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-8x_3+6x_4=0, \\ x_1 -x_2+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 -x_2 +x_3-3x_4=0, \\ 5x_1-4x_2 -x_3-8x_4=0, \\ x_1 +x_2+2x_3 -x_4=0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 +x_4=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1 +x_2-x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4=0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 -x_2 +x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3=0, \\ x_1+3x_2-4x_3=0, \\ 5x_1 +x_2-2x_3=0. \end{cases}$

4.16. Riješi nehomogene sustave:

a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3= 11, \\ 3x_1 -x_2+5x_3= 16, \\ x_1+2x_2-4x_3=-7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 +x_2 -3x_4-4x_5=0, \\ x_1 +x_2-x_3+2x_4 -x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3 -x_4+3x_5=0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3 +x_4 -x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5=3, \\ 4x_1+7x_2 +x_3+5x_4+3x_5=1, \\ 5x_1+9x_2+4x_3+7x_4+5x_5=8. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+x_2 = 1, \\ x_1+x_2+x_3 = 4, \\ x_2+x_3+x_4 =-3, \\ x_3+x_4+x_5= 2, \\ x_4+x_5=-1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 +x_2 -x_3+2x_4= 1. \\ -2x_1 +x_2 +x_3+4x_4=-3. \\ 5x_1 -x_2+2x_3+3x_4=-2. \\ 3x_1-4x_2+3x_3-5x_4= 0. \end{cases}$

4.17. Riješi sustave:

a) $\begin{cases} x_1 -x_2 +x_3= 4, \\ 2x_1 +3x_3= 5, \\ 4x_1+8x_2+10x_3=-2, \\ -2x_2 +3x_3= 7. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1-3x_2+3x_3 +x_4 +x_5= 0, \\ 6x_1 -x_2 +x_3+2x_4 -x_5= 6, \\ -2x_1+3x_2-2x_3 -x_4+2x_5=-4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+4x_2 +3x_3 -x_4=0, \\ 3x_1+7x_2+24x_3-18x_4=4, \\ 2x_1+9x_2 +3x_3 +x_4=1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1+3x_2 -x_3 +x_4=2, \\ 7x_1-2x_2 +x_4=3, \\ 3x_1 +x_2 +x_3-2x_4=7, \\ 3x_1-8x_2+2x_3 -x_4=5. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2 +x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2 +x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3 =2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 = 1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2 +x_3 -x_4-x_5= 3, \\ x_1-4x_2 +x_3 +x_4-x_5= 3, \\ x_1+2x_2 +x_3 -x_4+x_5=-1. \end{cases}$

4.18. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustave:

a) $\begin{cases} 3x_1 +(2-\lambda)x_2 +x_3= -\lambda, \\ \lambda x_1 +(\lambda-1)x_2 +x_3= 2\lambda, \\ (4\lambda+3)x_1+(2\lambda-1)x_2+(\lambda+4)x_3=2\lambda+3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ (\lambda+1)x_1 + (\lambda+2)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ \lambda x_2 - \lambda x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0. \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

4.19. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustave:

a) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1. \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1. \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

4.20. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbf{R}$ riješi sustav:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$$

4.21. Riješi sustave Cramerovim pravilom:

a) $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x + y + 2z = 10, \\ x - 3y + z = -2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ x + 2y + z = 3, \\ x + y + 2z = -1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x + y - 4z = -3, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = -2, \\ 5x + 3y - 4z = -2, \\ 4x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4. \\ x + 2y - 4z = 19. \\ -3x + 4y + 2z = 3. \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -17, \\ 4x + 3y - 2z = 18, \\ 3x + y + 3z = -7. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + 2z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$

4.22. Riješi sustave Cramerovim pravilom:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 - 13 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 1 = 0, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 - 11 = 0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

4.23. Odredi polinom $P(x)$ trećeg stupnja za kojega vrijedi
a) $P(-1) = 7, \quad P(0) = 1, \quad P(1) = -5, \quad P(2) = -5;$
b) $P(-1) = 0, \quad P(1) = 4, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 16.$

4.24. Odredi parabolu četvrtog stupnja koja prolazi točkama $(0, 5)$, $(2, -13)$, $(3, -10)$, $(1, -2)$, $(-1, 14)$.

4.25. Prikaz funkcije $\ln(1+x)$ preko reda potencija glasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Pokaži da se koeficijenti (c_n) u prikazu funkcije

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

računaju formulama

$$c_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

4.26. Eulerovi brojevi (e_n) koeficijenti su u sljedećem prikazu:

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{e_1}{2!}x^2 + \frac{e_2}{4!}x^4 + \frac{e_3}{6!}x^6 + \dots.$$

Koristeći poznati prikaz

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

pokaži da vrijedi

$$c_n = (2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

4.27. Koristeći prikaze

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

pokaži da se koeficijenti (c_n) u prikazu funkcije

$$\operatorname{tg} x = x + c_1x^3 + c_2x^5 + c_3x^7 + \dots$$

računaju formulom

$$c_n = \begin{vmatrix} \frac{2}{3!} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \frac{1}{(2n-6)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

5. Vektori

Orijentirana dužina je svaki uređeni par (A, B) točaka A i B iz trodimenzionalnog euklidskog prostora E^3. Označavamo je s $\overrightarrow{AB}$. Dvije orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ nazivamo ekvivalentnim, i pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ako je četverokut $ABDC$ paralelogram. **Vektor** je klasa ekvivalentnih usmjerenih dužina. Označavamo ga masnim slovima: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,... Usmjerenu dužinu $\overrightarrow{AB}$ iz te klase zovemo **reprezentantom vektora**.

Po dogovoru, pisati ćemo i $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, poistovjećujući vektor s nekim njegovim reprezentantom.

Svaki vektor iz V^3 jednoznačno je određen svojom **duljinom** (**modulom**), **nosačem** — pravcem na kojemu leži i **orijentacijom** na tome pravcu. Nosač i orijentaciju nazivamo kratko **smjerom**.

5.1. Operacije s vektorima

5.1. Točka C dijeli dužinu AB u omjeru $\lambda : 1$,

$$d(A, C) : d(C, B) = \lambda : 1.$$

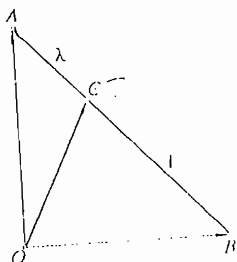
Prikaži vektor $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

Rješenje. Vrijedi $|\overrightarrow{AC}| = \lambda|\overrightarrow{CB}|$ i zato $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ pošto ovi vektori imaju isti nosač i orijentaciju. Zato je

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

i odavde

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\lambda + 1}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + 1}\overrightarrow{OB}.$$



Sl. 5.1. Radij vektor točke koja dijeli dužinu u zadanom omjeru.

Označimo $t = 1/(\lambda + 1)$. Vidimo da se radij vektor svake točke T koja leži na dužini $\overline{AB}$ može prikazati u obliku

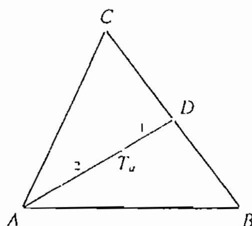
$$\overrightarrow{OT} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$$

gdje je t skalar, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Specijalno, ako je točka C polovište dužine AB, tada vrijedi

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

5.2. Dokaži da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki.



Sl. 5.2. Točka T_a izabrana je na težišnici pri vrhu A, i dijeli tu težišnicu u omjeru 2 : 1. To je kandidat za težište trokuta...

RJEŠENJE. Neka su $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ težišnice trokuta ABC. Izaberimo redom na tim težišnicama točke T_a, T_b, T_c koje imaju svojstvo da je njihova udaljenost do odgovarajućeg vrha dva puta veća od udaljenosti do polovišta nasuprotne stranice. Tada je $\overrightarrow{AT_a} = 2\overrightarrow{T_aD}$, i slično za točke T_b i T_c. Po Zadatku 1.1, dobivamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT_a} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT_a} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\\ &= \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

Na isti način dobivamo

$$\overrightarrow{OT_b} = \overrightarrow{OT_c} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Zato je $\overrightarrow{OT_a} = \overrightarrow{OT_b} = \overrightarrow{OT_c}$. Kako ovi vektori imaju zajednički početak, to se njihovi završetci moraju također podudarati, te je $T_a \equiv T_b \equiv T_c$. Dakle, sve tri težišnice prolaze kroz jednu točku T, koju nazivamo **težište** i čiji je radij-vektor dan sa

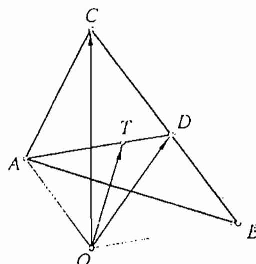
$$\overrightarrow{OT} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

5.3. Neka je T po volji odabrana točka unutar trokuta ABC. Pokaži da postoje tri skalara λ_1, λ_2, λ_3, $0 < \lambda_i < 1$, takva da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ i

$$\overrightarrow{OT} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} + \lambda_3\overrightarrow{OC}.$$

RJEŠENJE. Neka je D presječna točka pravca kroz A i T sa stranicom $\overline{BC}$. Po Zadatku 1.1, radij vektor $\overrightarrow{OT}$ točke T možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OD}\\ &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)(s\overrightarrow{OB} + (1-s)\overrightarrow{OC})\\ &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)s\overrightarrow{OB} + (1-t)(1-s)\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$



Sl. 5.3. Radij vektor točke T unutar trokuta je konveksna kombinacija radij vektora njegovih vrhova.

Stavimo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= t,\\ \lambda_2 &= (1-t)s,\\ \lambda_3 &= (1-t)(1-s).\end{aligned}$$

Tada vrijedi $0 < \lambda_i < 1$ i

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = t + (1-t)s + (1-t)(1-s) = 1$$

što dokazuje tvrdnju.

5.4. Ako u trokutu ABC točke P, Q, R dijele stranice u istim omjerima, dokaži da trokuti ABC i PQR imaju isto težište.

RJEŠENJE. Neka je $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR} = \lambda\overrightarrow{CA}$. Vrijedi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$. Neka je T težište trokuta ABC, a T' trokuta PQR. Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OT}.\end{aligned}$$

Slijedi da je $T' \equiv T$.

5.5. U paralelogramu $ABCD$ točka T na stranici AB dijeli tu stranicu u omjeru $1:(n-1)$. Neka je točka S presjek dužina $\overline{AC}$ i $\overline{TD}$. Nađi omjer u kojem S dijeli dijagonalu AC.

RJEŠENJE. Po uvjetu zadatka je $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$. Neka su α, β skalari za koje vrijedi $\overrightarrow{TS} = \beta\overrightarrow{TD}$, $\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TS} = \tfrac{1}{n}\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{TD} = \tfrac{1}{n}\overrightarrow{AB} + \beta(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \tfrac{1}{n}\overrightarrow{AB} + \beta(-\tfrac{1}{n}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \tfrac{1}{n}(1-\beta)\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

S druge strane je $\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$. Izjednačavanjem ovih izraza dobivamo

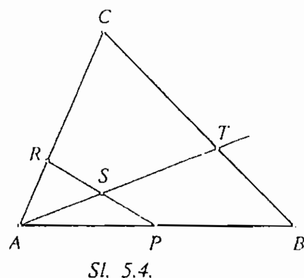
$$\tfrac{1}{n}(1-\beta)\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{AC} = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ linearno nezavisni, ova je relacija moguća samo ako se odgovarajući koeficijenti podudaraju: $\alpha = \frac{1}{n}(1-\beta)$ i $\alpha = \beta$. Odavde je $\alpha = \frac{1}{n+1}$. Prema tome, S dijeli dijagonalu $\overline{AC}$ u omjeru $1:n$.

5.6. Neka je u trokutu ABC točka P polovište dužine $\overline{AB}$, točka R takva da je $3\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AC}$, te S polovište dužine $\overline{PR}$. U kojem omjeru pravac AS dijeli stranicu BC?

RJEŠENJE. Označimo sa T točku presjeka pravca AS i stranice BC. Neka je $\overrightarrow{BT} = \alpha\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AT}$. Iz druge jednakosti nadalje je $\overrightarrow{AS} = \beta(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}) = \beta(\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC}) = \beta\overrightarrow{AB} + \alpha\beta\overrightarrow{BC}$. Također vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}) \\ &= \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \tfrac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{6}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

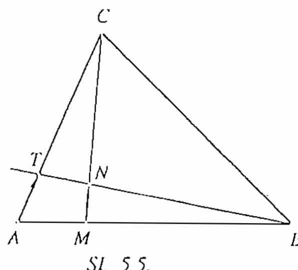


Sl. 5.4.

Izjednačavanjem izraza za $\overrightarrow{AS}$ dobivamo $\beta = \frac{5}{12}$ i $\alpha\beta = \frac{1}{6}$, odnosno $\alpha = \dfrac{2}{5}$. Točka T dijeli stranicu BC u omjeru $2:3$.

5.7. U trokutu ABC zadana je točka M tako da vrijedi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ i točka N za koju je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MC}$. Neka je T presjek pravaca AC i BN. U kojem omjeru dijeli točka T dužinu $\overline{AC}$?

RJEŠENJE. Neka je $\overrightarrow{AT} = \alpha\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{TN} = \beta\overrightarrow{TB}$. Iz posljednje jednakosti je $\overrightarrow{TN} = \beta(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB}) = \beta(-\alpha\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \beta\overrightarrow{AB} - \alpha\beta\overrightarrow{AC}$. S druge strane je i



Sl. 5.5.

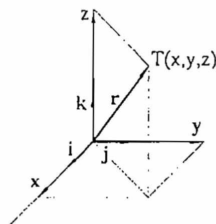
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TN} &= \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} \\
&= -\alpha\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{MC} \\
&= -\alpha\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{5}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -\alpha\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{5}(-\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \tfrac{1}{5}\overrightarrow{AB} + (\tfrac{1}{5} - \alpha)\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ su linearno nezavisni pa izjednačavanjem izraza za $\overrightarrow{TN}$ imamo: $\beta = \frac{1}{5}$ i $-\alpha\beta = \frac{1}{5} - \alpha$. Odavde je $\alpha = \frac{1}{4}$. Dakle, $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, odnosno $|AT| : |TC| = 1 : 3$.

5.2. Koordinatni sustav i kanonska baza

Kartezijev pravokutni koordinatni sustav čine tri međusobno okomite osi: Ox — os **apscisa**, Oy — os **ordinata**, Oz — os **aplikata**. Zajednička točka O ovih osi je **ishodište** koordinatnog sustava.

Jedinične vektore koordinatnih osi označavamo s $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$. Trojku vektora $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ nazivamo **kanonska baza** prostora V^3.



Sl. 5.6. Koordinate točke jednake su komponentama radij-vektora

Točki $T(x, y, z)$ odgovara **radij-vektor**

$$\overrightarrow{OT} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

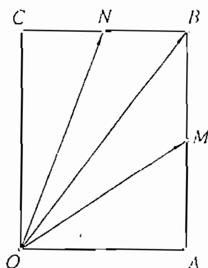
Bilo koji vektor $\mathbf{a}$ prikazujemo u obliku

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Ako su $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke, tada vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

5.8. U pravokutniku $OABC$ s vrhovima $O(0,0)$, $A(3,0)$, $C(0,4)$ povučene su spojnice OM, ON vrha O sa polovištima M i N stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$. Rastavi vektor $\overrightarrow{OB}$ po komponentama u smjerovima vektora $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{ON}$.



Sl. 5.7.

RJEŠENJE. Zbog komplanarnosti vektora $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON}$, postoje skalari t i s takvi da je

$$\overrightarrow{OB} = t\overrightarrow{OM} + s\overrightarrow{ON}.$$

Odredimo ih. Vrijedi

$$\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{OM} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j},$$

$$\overrightarrow{ON} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

i mora vrijediti

$$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = t(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + s(\frac{3}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j}).$$

Dakle $3 = 3t + \frac{3}{2}s$ i $4 = 2t + 4s$. Odavde je $t = s = \frac{2}{3}$. Prema tome traženi rastav je $\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$.

5.9. Odredi točku $T(x, y, z)$ takvu da radijvektor $\mathbf{r}$ točke T ima duljinu 6, da zatvara s osi Ox kut od $\dfrac{\pi}{4}$, a s osi Oy kut od $\dfrac{\pi}{3}$, te da je aplikata z točke T negativna.

RJEŠENJE. Vrijedi $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Nadalje

$$\frac{x}{r} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \frac{y}{r} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

i kako je $r = 6$, to dobivamo $x = 3\sqrt{2}$, $y = 3$, $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = -3$. Dakle, točka T ima koordinate $T(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

5.10. Zadani su vrhovi $A(1,-2,3)$, $B(3,2,1)$, $C(6,4,4)$ paralelograma $ABCD$. Odredi koordinate vrha D.

RJEŠENJE. Da bi našli koordinate vrha D trebamo naći radijvektor $\overrightarrow{OD}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &= (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) - (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} - 2j + 3\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Dakle, $D(4,0,6)$.

5.3. Skalarni, vektorski i mješoviti produkt

Skalarni produkt (umnožak) dvaju vektora je preslikavanje $\cdot : V^3 \times V^3 \rightarrow \mathbf{R}$ koje paru vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ pridružuje skalar, u oznaci $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ definiran na način

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Svojstva skalarnog produkta su

1. **Pozitivnost.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ ako i samo ako je $\mathbf{a} = 0$.
2. **Komutativnost.** Za svaka dva vektora vrijedi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
3. **Distributivnost.** Za svaka tri vektora vrijedi
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$
4. **Homogenost.** Za svaka dva vektora i bilo koji skalar λ imamo
$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

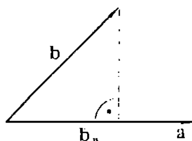
Skalarni umnožak dvaju vektora prikazanih u kartezijevom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

glasi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Vektorska projekcija vektora $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ je vektor koji dobijemo ortogonalnim projiciranjem, vidi sl. 5.8. Označava se s $\mathbf{b}_\mathbf{a}$. Skalarna projekcija vektora $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ jest skalar čija je apsolutna vrijednost duljina vektorske projekcije.



Sl. 5.8. Vektorska projekcija na vektor

* * *

Vektorski produkt (umnožak) je preslikavanje $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ koje paru vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ pridružuje vektor, u oznaci $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, čiji je modul $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, smjer okomit na smjer vektora $\mathbf{a}$ i na smjer vektora $\mathbf{b}$ a orjentacija takva da trojka $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ čini desni sustav.

Svojstva vektorskog produkta. Za sve vektore $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ i bilo koji skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ vrijedi

1. **Antikomutativnost.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$,
2. **Distributivnost.** $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
3. **Homogenost.** $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$.

Odavde slijedi $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ za svaki vektor $\mathbf{a}$. Također, modul vektorskog produkta $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ jednak je površini paralelograma što ga zatvaraju vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Vektorski umnožak dvaju vektora, prikazanih u kartezijevom koordinatnom sustavu, dobiva se razvojem sljedeće determinante po prvome retku:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

* * *

Mješoviti umnožak triju vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je skalar, u oznaci $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ definiran sa

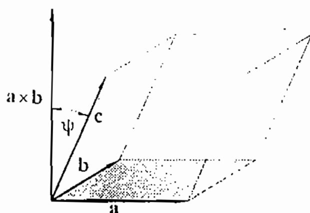
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Apsolutna vrijednost mu je jednaka volumenu paralelepipeda kojeg razapinju vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Neobična oznaka za mješoviti umnožak posljedica je činjenice da on ne ovisi o izboru vektorskih operacija, pa čak se ne mijenja niti cikličkom zamjenom vektora:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \\ &= -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]. \end{aligned}$$

Za mješoviti produkt vektora prikazanih u kartezijevom sustavu vrijedi sljedeća formula:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



Sl. 5.9. Apsolutna vrijednost mješovitog umnoška jednaka je volumenu paralelepipeda kojega razapinju ti vektori

* * *

Vektorsko-vektorski produkt triju vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ računa se na način

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

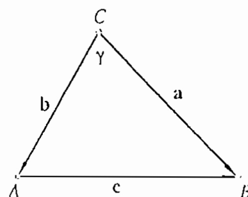
To je vektor koji se nalazi u ravnini razapetoj vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Slično, vrijedi

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

5.11. Izvedi vektorskim računom kosinusov poučak.

RJEŠENJE. Orjentirajmo vektore stranica u trokutu kao na slici 5.10. Tada je $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ i zato

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma. \end{aligned}$$



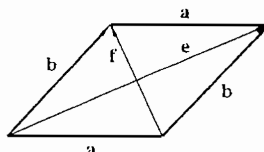
Sl. 5.10.

5.12. Dokaži da su dijagonale romba međusobno okomite.

RJEŠENJE. Označimo vektore stranica i dijagonala romba kao na slici 5.11. Vrijedi $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ i $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Zato je

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{f} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a} \\ &= -|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 0 \end{aligned}$$

i stoga $\mathbf{e} \perp \mathbf{f}$.

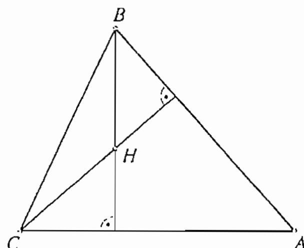


Sl. 5.11.

5.13. Dokaži da se sve tri visine trokuta sijeku u jednoj točki.

RJEŠENJE. Označimo sa H presječnu točku dviju visina, spuštenih iz vrhova B i C. Tada je $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$, odnosno $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ i $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Moramo pokazati da vrijedi $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, tj. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

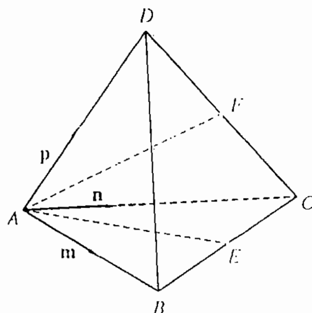
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{aligned}$$



Sl. 5.12.

5.14. Iz vrha pravilnog tetraedra povučene su simetrale dviju strana tog tetraedra. Koliki je kut φ među tim simetralama?

RJEŠENJE. Označimo sa $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ jedinične vektore vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, redom. Tada vektori $\overrightarrow{AE}$ koji je kolinearan sa $s_1 = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ i $\overrightarrow{AF}$ kolinearan sa $s_2 = \mathbf{n} + \mathbf{p}$ određuju simetrale kuta pri vrhu A, u trokutovima ABC i ACD (slika 5.13). Vrijedi



Sl. 5.13.

$$|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{p}| = 1,$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

i odavde

$$\cos\varphi = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1|\,|s_2|} = \frac{(\mathbf{m}+\mathbf{n})(\mathbf{n}+\mathbf{p})}{\sqrt{(\mathbf{m}+\mathbf{n})(\mathbf{m}+\mathbf{n})}\sqrt{(\mathbf{n}+\mathbf{p})(\mathbf{n}+\mathbf{p})}}$$

$$= \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{m}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} + 2\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\sqrt{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + 2\mathbf{n}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}}$$

$$= \frac{3\cos\frac{\pi}{3} + 1}{2 + 2\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{6}.$$

Dakle, $\varphi = \arccos\frac{5}{6} = 33°33'$.

5.15. Dokaži da u trostranoj piramidi s dva para međusobno okomitih nasuprotnih bridova i treći par bridova mora biti međusobno okomit.

RJEŠENJE. Neka su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektori osnovke, a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektori bridova piramide pri čemu je $\mathbf{y} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{z} \perp \mathbf{a}$, tj. $\mathbf{y}\cdot\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{z}\cdot\mathbf{a} = 0$ (nacrtaj sliku!). Računamo $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x} = (-\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{a}+\mathbf{b}) - \mathbf{b}\cdot\mathbf{y} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{z} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{y} = 0$. Zato je $\mathbf{c} \perp \mathbf{x}$.

5.16. U trokutu ABC zadano je $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$, $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. Odredi kut između vektora $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AM}$ gdje je M polovište dužine $\overline{BC}$.

RJEŠENJE. Vrijedi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3$. Označimo $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$. Sada je

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = (\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 - \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \tfrac{5}{2},$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}} = \sqrt{(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})} \\ &= \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{7}, \\ |\overrightarrow{AM}| &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Konačno je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{5}{\sqrt{133}}; \qquad \varphi \approx 64^\circ 18'.$$

5.17. Zadani su vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ takvi da vrijedi $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = \frac{5}{2}$. Odredi skalarnu projekciju vektora $\mathbf{c}$ na vektor $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

RJEŠENJE. Tražena projekcija jednaka je $c_d = \dfrac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$. Nadalje $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Zbog $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ vrijedi kosinusov poučak:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \end{aligned}$$

odakle dobijemo $\cos\alpha = \frac{37}{40}$, $\cos\beta = \frac{13}{20}$, $\cos\gamma = -\frac{5}{16}$. Zato je $\cos\sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\frac{37}{40}$, $\cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -\frac{13}{20}$, $\cos\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{5}{16}$, odnosno $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = -\frac{137}{8}$. Odavde

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})} = \sqrt{4|\mathbf{a}|^2 + 12\mathbf{ab} + 9|\mathbf{b}|^2} = \sqrt{\tfrac{95}{2}}.$$

Tražena projekcija je $c_d = -\frac{137\sqrt{2}}{8\sqrt{95}}$.

5.18. Neka su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od 45°. Odredi površinu paralelograma s dijagonalama $\mathbf{e} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{f} = 4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}$.

RJEŠENJE. Označimo vektore stranica i dijagonala paralelograma kao na slici 5.6. Površina paralelograma iznosi

$$P = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Kako je $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$, to vrijedi $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} - \mathbf{f})$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{e} + \mathbf{f})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{e} - \mathbf{f}) \times (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = \tfrac{1}{4}(\mathbf{e} \times \mathbf{e} - \mathbf{f} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{f} - \mathbf{f} \times \mathbf{f}) \\ &= \tfrac{1}{2}\mathbf{e} \times \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(2\mathbf{m} - \mathbf{n}) \times (4\mathbf{m} - 5\mathbf{n}) \\ &= \tfrac{1}{2}(8\mathbf{m} \times \mathbf{m} - 10\mathbf{m} \times \mathbf{n} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m} + 5\mathbf{n} \times \mathbf{n}) \\ &= \tfrac{1}{2}(10\mathbf{n} \times \mathbf{m} - 4\mathbf{n} \times \mathbf{m}) = 3\mathbf{n} \times \mathbf{m}.\end{aligned}$$

Odavde $P = 3|\mathbf{n} \times \mathbf{m}| = 3\sin 45^\circ = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

5.19. Dokaži formule

a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$;

b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a}$;

c) $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$;

d) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$.

RJEŠENJE.

a)

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}, \mathbf{a}] \\ &= \{\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\} \cdot \mathbf{a} = \{((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}\} \cdot \mathbf{a} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{b} - \{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\}\mathbf{a} \\ &= [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\mathbf{a}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] &= \mathbf{a} \times \{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}\} \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d}).\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}\}\mathbf{c} - \{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}\}\mathbf{a}) \\ &= \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}\}\{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}\} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2.\end{aligned}$$

5.20. Zadani su vektori $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Odredi $\mathbf{a}_b$ projekciju vektora $\mathbf{a}$ u smjeru vektora $\mathbf{b}$.

RJEŠENJE. Vrijedi $\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \widehat{\mathbf{b}})\widehat{\mathbf{b}} = \dfrac{1}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$. $\mathbf{b}^2 = 1 + 1 + 16 = 18$ i $\mathbf{ab} = 1 - 1 + 8 = 8$ pa je $\mathbf{a}_b = \frac{8}{18}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{4}{9}\mathbf{j} + \frac{16}{9}\mathbf{k}$.

5.21. Odredi vektor $\mathbf{b}$ koji je kolinearan s vektorom $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ i zadovoljava uvjet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -18$.

RJEŠENJE. Vektor $\mathbf{b}$ moramo potražiti u obliku $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. Mora biti $-18 = \lambda\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda$ pa slijedi $\lambda = -2$. Dakle $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

5.22. Odredi površinu P i visinu v_B spuštenu iz vrha B u trokutu ABC sa vrhovima $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

RJEŠENJE. Vrijedi

$$\overrightarrow{AB} = (0-1)\mathbf{i} + (0+2)\mathbf{j} + (4-8)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = (6-1)\mathbf{i} + (2+2)\mathbf{j} + (0-8)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Zato je

$$P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-28\mathbf{j} - 14\mathbf{k}| = 7|2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = 7\sqrt{5}.$$

Još trebamo $v_B = \dfrac{2P}{|\overrightarrow{AC}|}$. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{105}$ pa je $v_B = \dfrac{2}{3}\sqrt{21}$.

5.23. Zadani su vektori

$$\mathbf{a} = (2\lambda, 1, 1 - \lambda), \qquad \mathbf{b} = (-1, 3, 0), \qquad \mathbf{c} = (5, -1, 8).$$

Odredi kut što ga vektor $\mathbf{c}$ zatvara s ravninom razapetom vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ ako vrijedi $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

RJEŠENJE. Iz uvjeta $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ imamo $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|}$, odnosno

$$|\mathbf{c}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

Uvrstimo tu $|\mathbf{b}| = \sqrt{10}$, $|\mathbf{c}| = 3\sqrt{10}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2\lambda + 3$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 2\lambda + 7$. Dobivamo $-6\lambda + 9 = 2\lambda + 7$, tj. $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4})$.

Neka je φ kut što ga vektor $\mathbf{c}$ zatvara sa ravninom razapetom sa vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Vrijedi

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

tj.

$$\sin\varphi = \cos\sphericalangle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Računamo $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}$. Sada imamo:

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{-\frac{9}{4} \cdot 5 - \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{5}{2} \cdot 8}{\sqrt{\frac{81}{16} + \frac{9}{16} + \frac{25}{4}} \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{19}}{15}.$$

Slijedi $\sin\varphi = \frac{\sqrt{19}}{15}$ i $\varphi \approx 16°53'$.

5.24. Jesu li baze $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ i $(\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ jednako orijentirane?

RJEŠENJE. Za vektore prve baze je $[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}] = 1 > 0$ pa tvore desnu bazu. Provjerimo uvjet za vektore druge baze

$$[\mathbf{i}-\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

pa je i ovo desna baza. Dakle, jednako su orijentirane.

5.25. Zadani su vektori $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ sa svojim skalarnim komponentama (u pravokutnom koordinatnom sustavu) $\mathbf{X} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, $\mathbf{Z} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{c})$, gdje su $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{b} = (1,-1,1)$, $\mathbf{c} = (1,1,-1)$. Da li su $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Z}$ komplanarni?

RJEŠENJE. Vrijedi $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 3$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 1$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 3$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = -1$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = 3$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 1$ pa su $\mathbf{X} = (3,1,1)$, $\mathbf{Y} = (1,3,-1)$, i $\mathbf{Z} = (1,-1,3)$. Vektori su komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli.

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$

Dakle, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{Z}$ nisu komplanarni.

5.4. Zadaci za vježbu

5.26. Ako u peterokutu $PQRST$ vrijedi $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PT}$, dokaži da je onda $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{TS}$.

5.27. Ako je $ABCD$ paralelogram, E i F točke na dijagonali $\overline{BD}$ takve da je $|BE| = |FD|$, dokaži da je tada i $AECF$ paralelogram.

5.28. Dokaži da se u paralelogramu dijagonale raspolavljaju.

5.29. Zadan je trokut s vrhovima A, B, C i točka O u prostoru. Neka su A', B' i C' polovišta stranica BC, CA, AB. Dokaži da je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$.

5.30. Trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ imaju težišta T_1 i T_2. Dokaži da vrijedi relacija

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{T_1T_2}.$$

5.31. Neka su $ABCD$ i $EFGH$ četverokuti, a M i N sjecište spojnica polovišta nasuprotnih stranica tih četverokuta. Dokaži da vrijedi

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DE} = 4\overrightarrow{MN}.$$

5.32. U tetraedru $PQRS$ točke H i K polovišta su bridova $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$. Pokaži da vrijedi:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QS} = 4\overrightarrow{HK}.$$

5.33. U pravilnom šesterokutu $OABCDE$ je $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Prikaži vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{OE}$ pomoću $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

5.34. Ako vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ razapinju paralelepiped, prikaži sve četiri glavne dijagonale pomoću $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

5.35. U kocki $ABCDEFGH$ stranice AE, BF, CG, DH su okomite na ravninu baze $ABCD$. Prikaži vektore $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CE}$ pomoću vektora $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AH}$.

5.36. Točke P i Q imaju radij vektore $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ s obzirom na ishodište O. Neka je točka X polovište od $\overline{PQ}$ i točka Y takva da je $\overrightarrow{OY} = 2\overrightarrow{YX}$. Ako se pravci PY i OQ sijeku u točki Z, prikaži $\overrightarrow{OY}$ i $\overrightarrow{PY}$ pomoću $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$. Ako je $\overrightarrow{PZ} = k\overrightarrow{PY}$, prikaži $\overrightarrow{OZ}$ pomoću $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i k. Zaključi odatle da je $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}\mathbf{q}$, odnosno $k = \frac{3}{2}$.

5.37. Neka je $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Točke P, Q i R su takve da vrijedi $3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$, $3\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OB}$ i $2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$, a točka S je presjek pravaca AB i OR. Ako je $\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{OS} = l\overrightarrow{OR}$, izračunaj $\overrightarrow{OR}$, k, l i $\overrightarrow{OS}$.

5.38. Ako su A, B, P i Q kao u prethodnom zadatku, a točka X presjek pravaca AQ i BP, točka Y presjek pravaca AB i OX, prikaži $\overrightarrow{OX}$ i $\overrightarrow{OY}$ pomoću $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

5.39. Zadan je trokut OAB i točke X i Y takve da je $2\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BY}$. Ako je Z presjek pravaca OX i AY, prikaži $\overrightarrow{OZ}$ pomoću $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

5.40. U paralelogramu $PQRS$ je $\overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{a}$ i $\overrightarrow{PS} = \mathbf{b}$. Točka T je takva da vrijedi $\overrightarrow{PT} = 2\mathbf{b}$. Ako se pravci PR i QS sijeku u točki X, a pravci RS i QT u točki Y prikaži vektore $\overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{PY}$, $\overrightarrow{QY}$ i $\overrightarrow{XY}$ pomoću $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

5.41. U paralelogramu $OABC$ točka P je polovište dužine $\overline{AB}$, a Q dijeli dužinu $\overline{OP}$ u omjeru $2:1$. Dokaži da točka Q leži na pravcu AC i nađi omjer $|AQ| : |QC|$.

5.42. U trokutu ABC točka Q je polovište stranice $\overline{CA}$, a točke P i R takve da je $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PC}$ i $2\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{AB}$. Izrazi radij vektor točke R pomoću radij vektora od P i Q. Pokaži da točka R leži na pravcu PQ i nađi omjer $|PR| : |QR|$.

5.43. U trokutu ABC uzete su točke P i Q tako da je $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Dužine $\overline{AP}$ i $\overline{BQ}$ sijeku se u točki S. Prikaži vektor $\overrightarrow{AS}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathrm{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\mathrm{b} = \overrightarrow{BC}$.

5.44. Neka su E i F polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ paralelograma $ABCD$, a G sjecište dužina $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$. U kojem omjeru točka G dijeli dužine $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$?

5.45. Neka su K i L točke na stranici $\overline{AD}$ i dijagonali $\overline{AC}$ paralelograma $ABCD$ takve da je $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Dokaži da su $\overrightarrow{KL}$ i $\overrightarrow{KB}$ kolinearni vektori.

5.46. Neka je $ABCD$ četverokut i E, F, G, H redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$. Dokaži da je četverokut $EFGH$ paralelogram.

5.47. Točke E i F su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$. Dokažite da su polovišta dužina $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ vrhovi paralelograma.

5.48. U konveksnom peterokutu $ABCDE$ točke K, L, M, N su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, a točke P i S polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Dokaži da je dužina $\overline{PS}$ paralelna sa stranicom $\overline{AE}$ i da je njena duljina jednaka $\frac{1}{4}d(A,E)$.

5.49. Pravci a i b su mimoilazni. Na pravcu a redom su dane točke A_1, A_2, ..., A_n $(n > 2)$, a na pravcu b redom točke B_1, B_2, ..., B_n tako da vrijedi

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} = \cdots = \frac{|A_{n-1}A_n|}{|B_{n-1}B_n|}.$$

Neka su C_1, C_2, ..., C_n redom polovišta dužina $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ..., $\overline{A_nB_n}$. Dokažite da su točke C_1, C_2, ..., C_n kolinearne.

5.50. Dokaži da se spojnice polovišta nasuprotnih bridova u tetraedru raspolavljaju.

5.51. Dokaži (vektorskim računom) da se u trokutu simetrale stranica sijeku u jednoj točki.

5.52. Dokaži (vektorskim računom) da se u trokutu simetrale kuteva sijeku u jednoj točki.

5.53. Pokaži da se radij vektor svake točke T unutar tetraedra može napisati u obliku

$$\overrightarrow{OT} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} + \lambda_3\overrightarrow{OC} + \lambda_4\overrightarrow{OD}$$

gdje su λ_i pozitivni brojevi, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$.

5.54. Zadan je tetraedar $ABCD$. Neka je E polovište brida $\overline{BC}$, a F polovište dužine $\overline{DE}$. Prikažite vektor $\overrightarrow{CF}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\mathrm{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathrm{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathrm{c} = \overrightarrow{AD}$.

5.55. Pokaži da se težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki. (Težišnica tetraedra je spojnica vrha s težištem nasuprotne strane).

* * *

5.56. Dokaži da za bilo koje vektore $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ vrijedi $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq \big||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|\big|$. Kada vrijedi jednakost?

5.57. Neka je $\mathbf{a} = 24\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ i $|\mathbf{b}| = 15$. Nađi moguće vrijednosti za $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

5.58. Odredi modul vektora $|\mathbf{a}|$ zadanog s $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, ako je $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = 3$ i $\sphericalangle(p,q) = \frac{\pi}{6}$.

5.59. Izračunaj površinu paralelograma čije su dijagonale $\mathbf{d} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, $\mathbf{e} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ gdje su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut od $30°$.

5.60. Zadano je $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$ i $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 24$. Odredi $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

5.61. Ako je $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = 30$, odredi $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

5.62. Vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ zadovoljavaju uvjete $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$. Odredi $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$

5.63. Neka je C bilo koja točka na kružnici sa promjerom $\overline{AB}$, različita od A i od B. Dokaži Talesov teorem, odnosno $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$.

5.64. Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ vektori različiti od $\mathbf{0}$. Ako je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, dokaži da je onda $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ili $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b}-\mathbf{c})$.

5.65. Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ vektori takvi da je $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 3$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4$. Odredi λ tako da vektor $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ bude okomit na vektor $\mathbf{c}$.

5.66. Neka su $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ komplanarni vektori takvi da je $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 5$ i $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = -1$. Izrazi vektor $\mathbf{c}$ pomoću $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

5.67. U trokutu ABC točka D je polovište od $\overline{BC}$. Dokaži Apolonijev teorem

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AD|^2 + |BD|^2).$$

5.68. Odredi kut među glavnim dijagonalama u kocki.

5.69. U pravilnom tetraedru $ABCD$ neka je točka E polovište od $\overline{AD}$ i F polovište od $\overline{AC}$. Odredi kosinus kuta između vektora $\overrightarrow{EC}$ i $\overrightarrow{BF}$.

5.70. Izračunaj $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ i $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$ za

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

5.71. Odredi površinu paralelograma koji u koordinatnom sustavu $(O;\mathbf{i},\mathbf{j})$ ravnine ima vrhove **a)** $(1,1)$, $(4,1)$, $(2,2)$, $(5,2)$; **b)** $(1,2)$, $(0,0)$, $(2,6)$, $(1,4)$.

5.72. a) Zadani su vektori $\mathbf{a} = (3, -6, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 4, -5)$ i $\mathbf{c} = (3, 4, -12)$. Nađi projekciju vektora $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{c}$, tj. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_c$.
b) Zadani su $\mathbf{a} = (1, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (3, -4, 2)$ i $\mathbf{c}(-1, 1, 4)$. Nađi projekciju vektora $\mathbf{a}$ na $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.
c) Dokaži da je $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_c = \mathbf{a}_c + \mathbf{b}_c$ za bilo koje vektore $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
d) Opovrgni tvrdnju: $\mathbf{a}_{b+c} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_c$.

5.73. Nađite duljine stranica i kutove trokuta sa vrhovima: a) $A(1, 2)$, $B(1, 5)$, $C(3, 4)$; b) $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 2)$, $C(0, 3, 0)$.

5.74. Zadani su vektori $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \sqrt{6}\mathbf{j}$. Dokaži da su vektori $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ i $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ okomiti. Koji uvjet moraju zadovoljavati vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ da bi $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ i $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ bili okomiti?

5.75. Ako je vektor $\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ okomit na vektore $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ izračunaj komponente y i z.

5.76. Zadan je vektor $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Odredi vektor $\mathbf{b}$ tako da bude $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ i $|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$.

5.77. Odredi jedinične vektore okomite na vektore: a) $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$; b) $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{i}$; c) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ i $\mathbf{i} - \mathbf{j}$; d) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ i $\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

5.78. Dokaži da su dijagonale četverokuta čiji su uzastopni vrhovi $A(-2, -5)$, $B(5, -1)$, $C(2, 3)$, $D(-3, 3)$ okomite.

5.79. Zadan je trokut sa vrhovima $A(3, 1, \lambda)$, $B(2, -1, 4)$, $C(1, 2, 3)$. Odredi $\lambda \in \mathbf{R}$ tako da kut uz vrh C bude pravi.

5.80. Tri vrha paralelograma $ABCD$ su: $A(2, -1, 5)$, $B(0, 2, -1)$ i $C(-2, 4, 3)$. Odredi četvrti vrh D.

5.81. Izračunaj volumen tetraedra sa vrhovima: a) $A(1, 1, 1)$, $B(6, 3, 1)$, $C(3, 6, 1)$, $D(2, 3, 5)$; b) $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, -1, 1)$.

5.82. Dokaži da točke $A(-3, 2, 4)$, $B(6, 5, 10)$, $C(9, 1, 4)$, $D(3, -1, 0)$ leže u istoj ravnini.

5.83. Izračunaj površinu trokuta sa vrhovima: a) $(4, 4, 4)$, $(2, 4, 2)$, $(3, 3, 6)$; b) $(4, -2, 6)$, $(6, -1, 7)$, $(5, 0, 5)$.

5.84. Zadani su vektori $\mathbf{a} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -2)$, $\mathbf{c} = (2, 2, -1)$ i $\mathbf{d} = (3, 8, 5)$. Svaki od njih prikaži pomoću preostala tri.

5.85. Dva susjedna vrha pozitivno orjentiranog kvadrata $ABCD$ su $A(2, 2)$ i $B(5, 4)$. Odredi koordinate vrhova C i D tog kvadrata i njegovu površinu.

5.86. Dokaži da su baze a) $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$; $(\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i})$; $(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ jednako orjentirane. b) $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i $(\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k})$ različito orjentirane. c) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ i $(\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ jednako orjentirane.

5.87. Dokaži **Lagrangeov identitet**

$$(\mathbf{ab})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Pomoću njega izvedi formulu $P = \sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{ab})^2}$ za površinu pravokutnika razapetog vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

5.88. Dokaži da vrijedi

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$;

b) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})] = 3[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$;

c) $((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \times ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) = 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{c}$.

5.89. Dokaži da je a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$;

b) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{d})(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$;

c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2(\mathbf{a} \times \mathbf{c})^2 - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}))^2 = \mathbf{a}^2[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$ koristeći jednakosti

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix}, \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

5.90. Dokaži da u koordinatnom sustavu $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ trokut s vrhovima $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ ima površinu jednaku apsolutnoj vrijednosti broja

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

6.

Pravac i ravnina

6.1. Ravnina

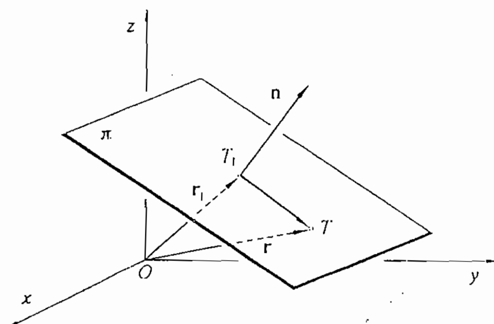
Ravnina π potpuno je određena jednom svojom točkom $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom normale $\mathbf{n} = A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. Pišemo $\pi = (T_1, \mathbf{n})$. Njena jednadžba glasi, u vektorskom obliku:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0. \qquad (1)$$

Tu je $\mathbf{r}$ radij vektor neke točke $T(x, y, z)$ u ravnini, a $\mathbf{r}_1$ radij vektor točke T_1. Skalarni oblik ove jednadžbe je

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (2)$$

To je jednadžba ravnine kojoj je zadan vektor normale i jedna točka.



Sl. 6.1. Ravnina

Kanonska jednadžba ravnine izvedena je iz 2 i glasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

Ako su svi koeficijenti različiti od nule, dijeljenjem ove jednadžbe sa $-D$, dobivamo segmentni oblik jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{4}$$

Točke $P(p,0,0)$, $Q(0,q,0)$, $R(0,0,r)$ su presječne točke ravnine s koordinatnim osima, a brojevi p, q, r su duljine odrezaka na koordinatnim osima.

Udaljenost točke $M(x_0,y_0,z_0)$ do ravnine $Ax+By+Cz+D=0$ računa se formulom

$$d(M,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{5}$$

Kut φ među ravninama $\pi_1=(T_1,\mathbf{n}_1)$, $\pi_2=(T_2,\mathbf{n}_2)$ jest kut što ga zatvaraju njihove normale

$$\varphi=\sphericalangle(\pi_1,\pi_2):=\sphericalangle(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2)$$

pri čemu su normale izbrane tako da taj kut bude šiljast (ili pravi). Ako je $\mathbf{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\mathbf{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, tada φ računamo formulom:

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{6}$$

Dvije su ravnine okomite ako je $\mathbf{n}_1\perp\mathbf{n}_2$, tj. ako je

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,$$

a paralelne ako su $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$ kolinearni, tj. ako je

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

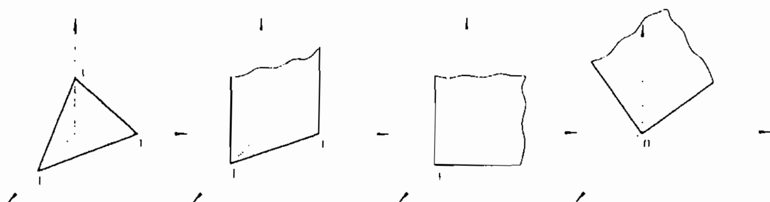
6.1. Nacrtaj sljedeće ravnine:
a) $x+y+z=1$; **b)** $x+y=1$; **c)** $x=1$; **d)** $x+y-z=0$.

RJEŠENJE. **a)** Ravnina odsjeca na koordinatnim osima odreske duljine 1. (slika 6.2.a).

b) Crtamo pravac $x+y=1$ u ravnini xOy. Ravnina prolazi tim pravcem i paralelna je s osi Oz (slika 6.2.b).

c) Ravnina siječe os Ox u točki s apscisom 1 i paralelna je s ravninom yOz. Naime, njoj pripadaju sve točke s koordinatama $T(1,y,z)$, za neke vrijednosti kordinata y i z.

d) Ravnina prolazi ishodištem. Za $y=0$ dobivamo $x-z=0$, za $x=0$ dobivamo $y-z=0$. Dakle ravnina prolazi pravcima $z=x$ odnosno $z=y$ koji leže u koordinatnim ravninama zOx odnosno yOz (slika 6.2.d).



Sl. 6.2.

6.2. Napiši jednadžbu ravnine koja:

a) prolazi ishodištem i ima vektor normale $\mathbf{n} = (2, 1, 0)$;

b) prolazi točkom $M(1, 0, -1)$ i ima vektor normale $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$;

c) prolazi točkom $T(1, -2, 0)$ i okomita je na spojnicu $\overline{TS}$, $S(0, -1, 1)$.

RJEŠENJE. Po formuli 2 možemo odmah napisati tražene jednadžbe;

a) $2(x-0) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0$, tj. $2x + y = 0$.

b) $0(x-1) + 1(y-0) + 2(z+1) = 0$, tj. $y + 2z + 2 = 0$.

c) Vektor $\overrightarrow{TS} = (0-1)\mathbf{i} + (-1+2)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ je normala ravnine, $-1(x-1) + 1(y+2) + 1(z-0) = 0$, tj. $-x + y + z + 3 = 0$.

6.3. Napiši jednadžbu ravine koja:

a) prolazi točkom $T(1, 0, 2)$ i okomita je na os Ox;

b) prolazi točkom $T(2, 1, 2)$ i paralelna je s xOy ravninom;

c) prolazi točkom $T(2, -1, 3)$ i paralelna je s osima Oy, Oz;

d) prolazi točkom $T(1, 3, 1)$ i osi Ox;

e) prolazi točkama $S(1, 2, -1)$, $T(3, 0, 2)$ i paralelna je s osi Ox;

f) prolazi osima Ox, Oy.

RJEŠENJE. Dovoljno je odrediti jednu točku i normalu ravnine.

a) $T(1, 0, 2)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $\pi \equiv x - 1 = 0$.

b) $T(2, 1, 2)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\pi \equiv z - 2 = 0$.

c) $T(2, -1, 3)$, $\mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\pi \equiv x - 2 = 0$.

d) $O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \overrightarrow{OT} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\pi \equiv -y + 3z = 0$.

e) $S(1, 2, -1)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \overrightarrow{ST} = -3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\pi \equiv 3y + 2z - 4 = 0$.

f) $O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\pi \equiv z = 0$.

6.4. Napiši jednadžbu ravnine π koja je:

a) okomita na ravnine $\pi_1 \equiv 2x - y + z - 2 = 0$, $\pi_2 \equiv x + z + 1 = 0$ i prolazi točkom $T(1, 2, -1)$;

b) okomita na ravninu $\pi_1 \equiv 3x - 2y + z - 3 = 0$ i prolazi točkama $T(2, 1, 3)$, $S(1, 0, -1)$.

RJEŠENJE. a) Vektori $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$ su vektori normala ravnina π_1, odnosno π_2. Kako je ravnina π okomita na te ravnine, to je i njena normala $\mathbf{n}$ okomita na $\mathbf{n}_1$ i na $\mathbf{n}_2$. Dakle, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ i zato $\pi \equiv -1(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z + 1) = -x - y + z + 4 = 0$.

b) Točke T i S leže u ravnini π i zato je njena normala $\mathbf{n}$ okomita na vektor $\overrightarrow{TS}$: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \overrightarrow{TS} = 9\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Izaberimo sada bilo koju od točaka T ili S, recimo S, i postavimo traženu ravninu $\pi = (S, \mathbf{n})$:

$$\pi \equiv 9(x - 1) + 11(y - 0) - 5(z + 1) = 9x + 11y - 5z - 14 = 0.$$

6.5. Odredi jednadžbu ravnine određenu točkama $M(1, -1, 2)$, $N(3, 2, 0)$, $P(1, -2, 1)$.

RJEŠENJE. Potrebno je odrediti vektor normale $\mathbf{n}$ tražene ravnine. Kako π sadrži spojnice $\overline{MN}$ i $\overline{MP}$, to je $\mathbf{n}$ okomit na vektore $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{MP}$:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = (2, 3, -2) \times (0, -1, -1) = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

i odavde $\pi = (M, \mathbf{n}) \equiv -5x + 2y - 2z + 11 = 0$.

6.6. Točke $A(2, 5, 0)$, $B(1, 6, 2)$, $C(-1, 4, 1)$, $D(1, 4, 3)$ određuju tetraedar. Odredi kut među stranama ABC i ABD.

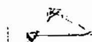
RJEŠENJE. Potrebno je odrediti kut φ što ga zatvaraju ravnina π_1 određena točkama A, B, C i ravnina π_2 određena točkama A, B, D. Odredimo njihove normale $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 2) \times (-3, -1, 1) = (3, -5, 4),$$

$$\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 2) \times (-1, -1, 3) = (5, 1, 2).$$

Zato

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|} = \frac{18}{\sqrt{50}\sqrt{30}} = 0{,}465, \qquad \varphi = 62^\circ 18'.$$



6.7. Odredi odreske koje na koordinatnim osima odsjeca ravnina
a) $2x+4y+5z-6=0$; b) $x+y-3z-12=0$; c) $3x-2y-6=0$.

RJEŠENJE. Jednadžbe ravnina moramo dovesti u segmentni oblik.

a)

$$2x+4y+5z=6 \Longrightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{\frac{6}{5}}=1$$

i odresci su $p=3$, $q=\frac{3}{2}$, $r=\frac{6}{5}$.

b) $p=12$, $q=12$, $r=-4$.

c) Ravnina se ne dade dovesti u segmentni oblik. Najviše što možemo učiniti jest da je napišemo u obliku $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ i odavde čitamo $p=2$, $q=-3$. Naime, odrezak r na osi Oz ne postoji, pošto je ravnina paralelna s osi Oz. Formalno možemo staviti $r=\infty$ i pisati $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{\infty}=1$.

6.8. Točkom $T(5,-3,1)$ položi ravninu koja odsjeca na osi Ox odsječak 1, a na osi Oy odsječak 2.

RJEŠENJE. Napišimo segmentni oblik tražene ravnine: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$. Zadano je $p=1$, $q=2$. Kako je $T\in\pi$, to koordinate točke T zadovoljavaju ovu jednadžbu. Odavde $r=-\frac{2}{5}$. Dakle, $\pi\equiv 2x+y-5z-2=0$.

6.9. Odredi jednadžbu ravnine koja sadrži os Oz, a s ravninom $\rho\equiv 2x+y-\sqrt{5}z=0$ zatvara kut od $60°$.

RJEŠENJE. Potrebno je odrediti vektor normale $\mathbf{n}$ tražene ravnine π. Stavimo $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. Kako π sadrži os Oz, to je $\mathbf{n}$ okomit na $\mathbf{k}$: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=0$, tj. $C=0$ i stoga $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}$. Ako sa $m=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ označimo vektor normale ravnine ρ, tada vrijedi

$$\cos 60°=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{m}|}=\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{10}}$$

tj.

$$(4A+2B)^2=10(A^2+B^2)$$

$$3\left(\frac{A}{B}\right)^2+8\frac{A}{B}-3=0$$

i odavde $A=-3B$ ili $3A=B$. Postoje dakle dvije ravnine:

$$\pi_1\equiv x+3y=0,\qquad \pi_2\equiv -3x+y=0.$$

6.10. Odredi jednadžbu ravnine ρ koja sadrži sve točke koje su jednako udaljene od

a) dviju ravnina $\pi_1 \equiv x - 3y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 3 = 0$;

b) dviju točaka $T_1(2, -1, 3)$, $T_2(1, 2, -1)$.

RJEŠENJE. a) Mora biti $d(T, \pi_1) = d(T, \pi_2)$ za svaku točku $T(x, y, z)$ tražene ravnine ρ:

$$\frac{|x - 3y - 2z + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x - y + 3z + 3|}{\sqrt{14}}$$

i odavde $x - 3y - 2z + 1 = \pm(2x - y + 3z + 3)$. Postoje stoga dva rješenja (dvije simetralne ravnine):

$$\rho_1 \equiv 3x - 4y + z + 4 = 0, \qquad \rho_2 \equiv x + 2y + 5z + 2 = 0.$$

b) Neka je $T(x, y, z)$ ponovo bilo koja točka tražene ravnine ρ. $d(T, T_1) = d(T, T_2)$ daje

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$$

odakle, nakon sređivanja, dobivamo $\rho \equiv x - y + 2z - 4 = 0$.

6.2. Pravac

Pravac p određen je nekom svojom točkom T_1 i vektorom smjera $\mathbf{c}$. Pišemo $p = (T_1, \mathbf{c})$. Ako je $\mathbf{r}$ radij vektor neke točke pravca, a $\mathbf{r}_1$ radij vektor točke T_1, tada vektorska jednadžba pravca glasi

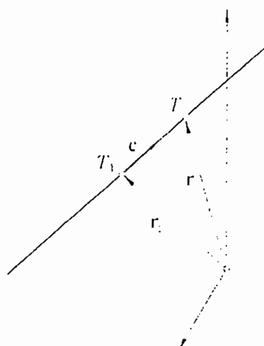
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{c}. \tag{7}$$

Ako je $T_1 = T_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{c} = (l, m, n)$, tada izjednačavanjem koeficijenata uz vektore u (6.7) možemo jednadžbu napisati u **parametarskom obliku**:

$$p \equiv \begin{cases} x = x_1 + tl, \\ y = y_1 + tm, \\ z = z_1 + tn, \end{cases} \tag{8}$$

ili, eliminacijom parametra t, u **kanonskom obliku**:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \tag{9}$$



Sl. 6.3. Pravac

Jednadžba pravca kroz dvije točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10}$$

Kut među pravcima $p_1(T_1, \mathbf{c}_1)$, $p_2(T_2, \mathbf{c}_2)$ jest šiljasti (ili pravi) kut među njihovim vektorima smjerova: ako je $\mathbf{c}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{c}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, računamo ga po formuli

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{11}$$

6.11. Parametarsku jednadžbu pravca p:

a) $p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases}$ b) $p \equiv \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1, \\ z = 1 + t, \end{cases}$

napiši u kanonskom obliku.

RJEŠENJE. Trebamo izračunati i zatim eliminirati parametar t iz gornjih jednadžbi.

a)

$$t = \frac{x-1}{2}, \quad t = y + 2, \quad t = \frac{z-3}{-2}.$$

Prema tome, kanonska jednadžba glasi:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Primjeti da u ovakvom zapisu uvijek ostavljamo broj 1 u nazivniku. Brojevi u nazivniku su komponente vektora smjera, dakle, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

b)

$$t = \frac{x}{2}, \qquad y = 1, \qquad t = z - 1.$$

Možemo napisati samo

$$\frac{x}{2} = \frac{z-1}{1}, \qquad y = 1.$$

Vektor smjera glasi $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ i nema komponente u smjeru vektora $\mathbf{j}$. Pisat ćemo kanonsku jednadžbu u formalnom obliku

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

tumačeći da ove jednadžbe imaju smisla samo ako je za svaku točku $T(x, y, z)$ ravnine ispunjeno $y \equiv 1$.

6.12. Napiši kanonsku i parametarsku jednadžbu pravca koji

a) prolazi točkom $M(1, 2-1)$ i ima vektor smjera $\mathbf{c} = (1, 3, -1)$;

b) prolazi točkama $M(1, 2, -1)$, $N(2. 0, 3)$;

c) prolazi točkama $M(1, 2, -1)$, $N(1. 1, 2)$.

RJEŠENJE. Možemo odmah napisati po formulama (6.8) i (6.9)

a)

$$x = 1 + t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = -1 - t,$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

b) Vektor smjera je $\mathbf{c} = \overrightarrow{MN} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Zato

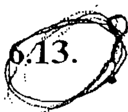
$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -1 + 4t, \end{cases} \qquad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

c) Sada je $\mathbf{c} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ i stoga parametarska jednadžba glasi

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases}$$

dok kanonsku možemo formalno pisati u obliku

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$



6.13. Pravac p zadan je kao presjecište dviju ravnina

$$p \equiv \begin{cases} x + y - 4z - 5 = 0, \\ 2x - y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Napiši njegovu jednadžbu u kanonskom i parametarskom obliku.

RJEŠENJE. Da bismo odredili tražene jednadžbe potrebna nam je jedna točka T s pravca p i njegov vektor smjera $\mathbf{c}$. Koordinate točke T dobivamo iz gornjeg sistema, stavljajući za vrijednost jedne koordinate bilo koji broj. Uzmimo npr. $z = -1$:

$$x + y = 1$$
$$2x - y = -1$$

i odavde $x = 0$, $y = 1$. Dakle, $T(0, 1, -1) \in p$. Vektor smjera $\mathbf{c}$ je okomit na vektore normala $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Kanonska jednadžba pravca p glasi

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Parametarsku jednadžbu možemo odavde direktno ispisati, no obično je "računamo", proširivši gornje jednadžbe

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} = t$$

i odavde

$$p = \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

6.14. Napiši u kanonskom obliku jednadžbu pravca

a) $p \equiv \begin{cases} -x + 2y + z - 4 = 0, \\ -x + 2y - 3z = 0; \end{cases}$ b) $p \equiv \begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$

RJEŠENJE. a) U ovom slučaju ne možemo uvrstiti u gornji sistem bilo koju vrijednost za nepoznanicu z (kao u prošlom zadatku) da bismo odredili točku koja leži na pravcu. Provjeri da dobiveni sistem po nepoznanicama x i y neće imati rješenja (za nasumce odabranu vrijednost varijable z). Mogli bismo fiksirati neku drugu nepoznanicu, no da ne bismo u svakom primjeru vršili dodatne analize, modificirati ćemo postupak objašnjen u prošlom zadatku: rješavamo gornji sustav po bilo koje dvije nepoznanice, tretirajući treću kao konstantu.

Oduzimajući gornje jednadžbe dobivamo $z = 1$ i zatim $-x + 2y = 3$, tj. $\frac{x+3}{2} = y$. Zato kanonska jednadžba glasi

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Vektor smjera je $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Uvjeri se da je $\mathbf{c} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

b) U ovim jednadžbama ne pojavljuje se nepoznanica z. To znači da, ukoliko x i y zadovoljavaju ovaj sistem, vrijednost varijable z možemo uzeti po volji. Drugim riječima, pravac će prolaziti točkom T čije prve dvije koordinate zadovoljavaju ovaj sistem i biti će paralelan s koordinatnom osi Oz.

Njegova parametarska jednadžba će glasiti

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 2, \\ z = t, \end{cases}$$

a kanonska

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}.$$

Primjeti da je $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

6.15. Odredi nepoznati parametar λ tako da pravci

$$p_1 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \qquad p_2 \equiv \frac{x-3}{\lambda} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-5}.$$

imaju presječnu točku.

RJEŠENJE. Napišimo parametarske jednadžbe pravaca:

$$p_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -3t, \\ z = 1 + 4t; \end{cases} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda s, \\ y = -2 + 4s, \\ z = 4 - 5s. \end{cases}$$

Da bi p_1 i p_2 imali zajedničku točku, mora biti

$$\begin{aligned} -1 + t &= 3 + \lambda s, \\ -3t &= -2 + 4s, \\ 1 + 4t &= 4 - 5s. \end{aligned}$$

Ovaj sistem (za neko fiksno λ) u principu nema rješenja, što znači da je mimosmjernost pravaca njihov očekivani položaj u prostoru.

Iz druge i treće jednadžbe dobivamo $t = 2$, $s = -1$. Broj λ određujemo tako da i prva jednadžba bude zadovoljena: $\lambda = 2$.

6.16. Pravac p prolazi točkama $A(-2, 1, 3)$, $B(0, -1, 2)$. Odredi kuteve što ih on zatvara s koordinatnim osima.

RJEŠENJE. Dovoljno je poznavati vektor smjera pravca, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Tražene kuteve nalazimo iz formule

$$\mathbf{c}_0 = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}. \tag{12}$$

Vrijedi

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

i zato $\alpha = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$, $\beta = \arccos(-\frac{2}{3}) = 131°49'$, $\gamma = \arccos(-\frac{1}{3}) = 109°28'$.

6.17. Izračunaj kut među pravcima

$$p_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{-7}, \qquad p_2 \equiv \frac{x+6}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

RJEŠENJE. Kut među pravcima jest kut među njihovim vektorima smjerova: $\mathbf{c}_1 = (1,-2,7)$, $\mathbf{c}_2 = (5,1,1)$:

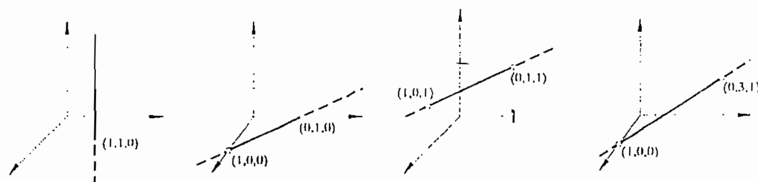
$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_1|\,|\mathbf{c}_2|} = -\frac{2\sqrt{2}}{27} \implies \varphi = 96°1'.$$

Kako je φ veći od $90°$, zamijenjujemo ga njegovim suplementom; dakle $\sphericalangle(p_1,p_2) = 180° - 96°1' = 83°59'$.

6.18. Nacrtaj pravce

a) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 1; \end{cases}$ d) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{-1}$.

RJEŠENJE. **a)** Pravac prolazi točkom $T(1,1,0)$ i okomit je na ravninu xOy (tj. paralelan s osi Oz). **b)** Pravac leži u XOy ravnini. **c)** Pravac izgleda poput prethodnog, podignut u ravninu $z = 1$ (paralelan s ravninom xOy). **d)** Pravac prolazi točkama $T(1,0,0)$, $S(0,3,1)$. Vidi sl. 6.4.a–d.



Sl. 6.4.

6.3. Pravac i ravnina

Kut φ između pravca i ravnine računamo po formuli

$$\varphi = \sphericalangle(p,\pi) := 90° - \sphericalangle(\mathbf{c},\mathbf{n})$$

pri čemu su $\mathbf{c}$ i $\mathbf{n}$ izabrani tako da kut među njima ne bude tupi. Dakle,

$$\sin\varphi = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{c}|\,|\mathbf{n}|}. \tag{13}$$

Pravac je paralelan s ravninom ako je $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=0$, tj. ako vrijedi

$$lA+mB+nC=0, \tag{14}$$

a okomit na ravninu ako je $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{n}$ za neki $\lambda\neq 0$, tj. ako vrijedi

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}. \tag{15}$$

Ako se dvije ravnine $\pi_1\equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\pi_2\equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ sijeku po pravcu p, tada jednadžba

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{16}$$

predstavlja za svaku vrijednost parametara λ, μ ravninu koja sadrži pravac p. Familiju tih ravnina za sve vrijednosti parametara λ, $\mu\in\mathbf{R}$ zovemo **pramen ravnina.** Geometrijski, te se ravnine rotiraju oko pravca p.

6.19. Odredi jednadžbu ravnine π koja: **a)** prolazi točkom $T(1,1,1)$ i okomita je na pravac $p\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}$; **b)** prolazi točkom $T(1,1,1)$ i paralelna je s pravcima $p_1\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$, $p_2\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$.

RJEŠENJE. **a)** Vektor normale $\mathbf{n}$ ravnine je ujedno vektor smjera $\mathbf{c}=(2,-1,1)$ pravca, zato je

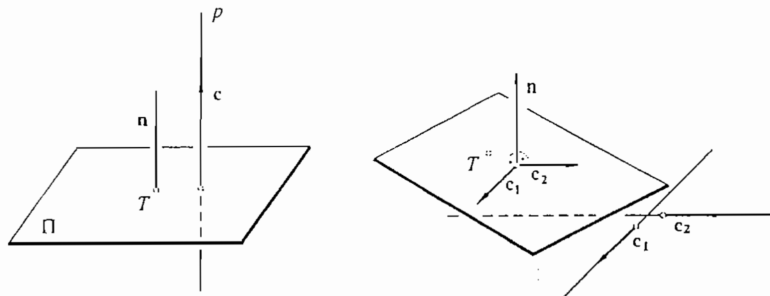
$$\pi\equiv 2(x-1)-1(y-1)+1(z-1)=0\equiv 2x-y+z-2=0$$

(slika 6.5.a).

b) Vektor smjera $\mathbf{n}$ sada je okomit na vektore smjerova pravaca p_1 i p_2:

$$\mathbf{n}=\mathbf{c}_1\times\mathbf{c}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Tako dobivamo $\pi\equiv -x+3y+z-3=0$. (slika 6.5.b).



Sl. 6.5.

6.20. Odredi jednadžbu ravnine π koja prolazi pravcem $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$, a okomita je na ravninu $\rho \equiv 2x + 3y + z + 1 = 0$.

RJEŠENJE. Točka $T(1,1,1)$ leži na pravcu p pa stoga i u ravnini π. Normala $\mathbf{n}$ ravnine π okomita je na vektor smjera $\mathbf{c}$ pravca p i na normalu $\mathbf{m}$ ravnine ρ. Dakle

$$\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \mathbf{m} = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

i jednadžba ravnine π je $-2x + y + z = 0$.

6.21. Odredi jednadžbu pravca p koji:

a) prolazi točkom $T(1,1,1)$ i okomit je na ravninu $\pi \equiv 2x+y+3z+1=0$;

b) prolazi točkom $T(1,1,1)$ i paralelan je s pravcem

$$q \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ -x+2y+z+3=0 \end{cases}.$$

RJEŠENJE. a) Kako je pravac okomit na ravninu, to za njegov vektor smjera $\mathbf{c}$ možemo uzeti vektor normale ravnine: $\mathbf{c} = \mathbf{n} = (2,1,3)$, i jednadžba pravca u kanonskom obliku glasi

$$p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

b) Vektor smjera pravca p je u ovom slučaju jednak vektoru smjera pravca q, odnosno, okomit na vektore normala ravnina koje određuju pravac q (skiciraj!):

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}.$$

Tako dobivamo

$$p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

6.22. Odredi jednadžbu ravnine π koja:

a) prolazi pravcem $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i paralelna je s osi Oy;

b) prolazi paralelnim pravcima $p_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $p_2 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$.

RJEŠENJE. a) Točka $T(1,-1,-1)$ leži na pravcu p te stoga i u ravnini π. Potrebno je još odrediti njenu normalu.

Kako je ravnina paralelna s osi Oy i s pravcem p, to je njena normala okomita na vektore smjerova tih pravaca:

$$\mathbf{n} = \mathbf{j} \times \mathbf{c} = \mathbf{j} \times (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

i zato je $\pi \equiv x + 2z + 1 = 0$.

b) Točke $M(1, 0, -2)$, $N(0, -1, 1)$ leže na pravcima, pa zato i u ravnini. Ravnina π je određena jednom točkom (recimo M) i normalom koja je okomita na vektor smjera $\mathbf{c}$ zadanih pravaca, kao i na vektor $\overrightarrow{MN}$, pošto spojnica $\overline{MN}$ leži u ravnini:

$$\mathbf{n} = \mathbf{c} \times \overrightarrow{MN} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -9\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

te je $\pi \equiv 3y + z + 2 = 0$.

6.23. Izračunaj kuteve što ih s koordinatnim osima zatvara ravnina $2x + 3y + z - 3 = 0$.

RJEŠENJE. Neka su α, β, γ traženi kutovi. Kako vrijedi $\sin\alpha = \cos\sphericalangle(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{i}$, i slično za $\sin\beta$, $\sin\gamma$, to jedinični vektor normale možemo pisati u obliku

$$\widehat{\mathbf{n}} = \sin\alpha\mathbf{i} + \sin\beta\mathbf{j} + \sin\gamma\mathbf{k}. \tag{17}$$

Kako je $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$, to dobivamo $\alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{14}} = 32°18'$, $\beta = 53°18'$, $\gamma = 15°30'$.

6.24. Izračunaj kut kojeg zatvaraju pravac $p \equiv \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$ i ravnina $\pi \equiv x - 8y + 3z - 6 = 0$.

RJEŠENJE. Vektor smjera pravca je

$$\mathbf{c} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

a vektor normale ravnine $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Zato je

$$\sin\varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{c}|} = \frac{100}{\sqrt{74}\sqrt{430}} = 0{,}7665, \qquad \varphi = 50°03'.$$

6.25. Odredi presjek pravca i ravnine:

a) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, $\pi \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0$,

b) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, $\pi \equiv 2x - 3y + 8z + 1 = 0$,

c) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$, $\pi \equiv 2x - 3y + 8z + 4 = 0$.

RJEŠENJE. Presjek pravca i ravnine najlakše određujemo tako da pravac napišemo u parametarskom obliku i zatim dobivene jednadžbe "uvrstimo" u jednadžbu ravnine:

a)

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -2t, \\ z = -1 - t, \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0.$$

Dobivamo $2(2+t)-3(-2t)+(-1-t)+4=0$ i odavde $t=-1$. Zato su $x=1$, $y=2$, $z=0$ koordinate presječne točke.

b) Sada $2(2+t)-3(-2t)+8(-1-t)+1=0$ daje $-3=0$, što znači da pravac ne siječe ravninu. Provjeri da je p zaista paralelan sa π (vektor normale ravnine okomit je na vektor smjera pravca), te da točka $A(2,0,-1)\in p$ ne leži u π!

c) U ovom slučaju je $2(2+t)-3(-2t)+8(-1-t)+4\equiv 0$, što znači da pravac leži u ravnini. Provjeri da je zaista $A(2,0,-1)\in\pi$.

6.26. Odredi jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $A(2,-3,1)$, okomit je na pravac $q\equiv\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-5}{3}$ i siječe ga!

RJEŠENJE. Postaviti ćemo ravninu π koja prolazi točkom A i okomita je na pravac q. Traženi pravac p prolazi točkom A i sjecištem pravca q s ravninom π.

Normala ravnine je $\mathbf{n}=\mathbf{c}=(2,-1,3)$, a njena jednadžba

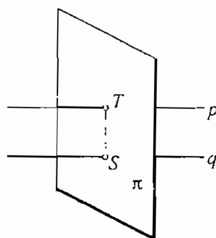
$$\pi\equiv 2(x-2)-1(y+3)+3(z-1)=0\equiv 2x-y+3z-10=0.$$

Presjek $q\cap\pi$ je tocka $B(1,-2,2)$, a jednadžba pravca p glasi $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

6.27. Odredi udaljenost dvaju paralelnih pravaca

$$p\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1};\qquad q\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+5}{-1}.$$

RJEŠENJE. Zadatak rješavamo ovim postupkom (slika 6.6):



Sl. 6.6.

(i) Odredimo točku T na pravcu p,npr. $T(1,-2,0)$. (ii) Postavimo ravninu π kroz točku T, okomitu na pravac p, Vektor normale $\mathbf{n}=\mathbf{c}=(2,3,-1)$, zato je $\pi\equiv 2x+3y-z+4=0$. (iii) Odredimo $S=q\cap\pi$. Parametarski prikaz pravca q je

$$q\equiv x=1+2t,\quad y=1+3t,\quad z=-1-t.$$

Presjek pravca i ravnine dobivamo kad je

$$2(1+2t)+3(1+3t)-(-1-t)+4=0\implies t=-1,$$

dakle, $S(-1,-2,-4)$. **(iv)** Izračunamo $d(p,q)=d(T,S)$:

$$d(p,q)=\sqrt{(1+1)^2+(2-2)^2+(0+4)^2}=2\sqrt{5}.$$

(Vidi i Zadatak 6.114.)

6.28. Odredi jednadžbu pramena ravnina koje prolaze pravcem

$$p\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1}.$$

RJEŠENJE. Dovoljno je jednadžbu pravca napisati u obliku

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3},\qquad \frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1}$$

i shvatiti ta dva dijela kao jednadžbe dviju ravnina koje u presjeku daju zadani pravac. To su ravnine $\pi_1\equiv 3x-2y-7=0$, $\pi_2\equiv y-3z+5=0$. Jednadžba traženog pramena glasi

$$\lambda(3x-2y-7)+\mu(y-3z+5)=0\implies 3\lambda x+(-2\lambda+\mu)y-3\mu z-7\lambda+5\mu=0.$$

6.29. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem

$$p\equiv\begin{cases}x+3y+5z-11=0\\ x-y-2z+7=0\end{cases}$$

i paralelna je s osi Oy.

RJEŠENJE. Napisati ćemo pramen ravnina koji prolazi zadanim pravcem i potom izdvojiti onu koja je paralelna s osi Oy. Kako je pravac zadan kao presjek dviju ravnina, jednadžbu pramena možemo odmah napisati:

$$x+3y+5z-11+\lambda(x-y-2z+7)=0,$$
$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z-11+7\lambda=0.$$

Parametar λ biramo tako da dobivena ravnina bude paralelna s osi Oy — koeficijent uz nepoznanicu y mora biti jednak nuli. Odavde slijedi $\lambda=3$ i rješenje $4x-z+10=0$.

6.30. Postoji li pravac koji je zajednički svim ravninama

$$(2+3t)x+(1-2t)y+(3+t)z+1-2t=0,$$

gdje je $t\in\mathbf{R}$ bilo koji?

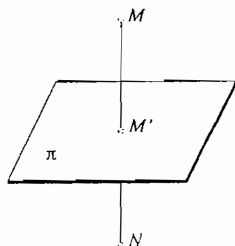
RJEŠENJE. Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$2x+y+3z+1+t(3x-2y+z-2)=0$$

i zato ona predstavlja pramen određen ravninama $\pi_1\equiv 2x+y+3z+1=0$, $\pi_2\equiv 3x-2y+z-2=0$. Kako te dvije ravnine nisu paralelne, one se sijeku po traženom pravcu. Odredi njegovu jednadžbu!

6.31. Nađi točku N simetričnu točki $M(1,1,1)$ s obzirom na ravninu $\pi \equiv x+y-2z-6=0$.

RJEŠENJE. Odredimo najprije projekciju M' točke M na ravninu π. Nju dobivamo kao presječnu točku ravnine π s pravcem p koji prolazi točkom M i okomit je na π. Kako je $\mathbf{c}=\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, to jednadžba pravca p glasi $p \equiv x=1+t,\ y=1+t,\ z=1-2t$. On siječe ravninu $x+y-2z-6=0$ za $t=1$, te je $M'(2,2,-1)$. Točka M' je polovište dužine čiji su krajevi u točki $M(1,1,1)$ i u traženoj točki $N(a,b,c)$. Zato je



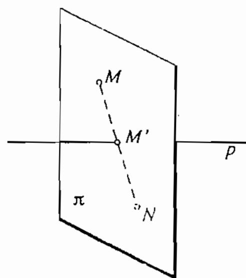
Sl. 6.7.

$$2=\frac{1+a}{2},\quad 2=\frac{1+b}{2},\quad -1=\frac{1+c}{2}$$

i odavde $N(3,3,-3)$.

6.32. Odredi točku N simetričnu točki $M(1,0,2)$ s obzirom na pravac $p \equiv \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+1}{1}$.

RJEŠENJE. Kao i u prošlom zadatku, odredit ćemo najprije projekciju M' točke M na pravac p. Nju dobivamo kao presjek pravca p i ravnine π koja prolazi točkom M i okomita je na pravac p. Kako je $\mathbf{n}=\mathbf{c}=(3,5,1)$, to je $\pi \equiv 3x+5y+z-5=0$. Presjek pravca $p \equiv x=2+3t,\ y=5t,\ z=-1+t$ i ravnine dobivamo za $t=0$, te je $M'(2,0,-1)=p\cap\pi$. Koordinate (a,b,c) točke N dobivamo iz $2=\dfrac{a+1}{2}$, $0=\dfrac{b+0}{2}$, $-1=\dfrac{c+2}{2}$, $N(3,0,-4)$.



Sl. 6.8.

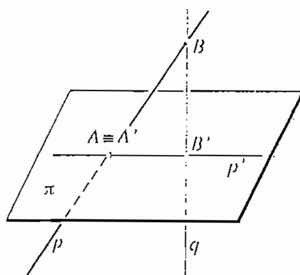
6.33. Zadani su paralelni pravci: $p \equiv \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{0}$, $q \equiv \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{0}$. Odredi ravninu π s obzirom na koju su ti pravci zrcalno simetrični.

RJEŠENJE. Točke $S(0,3,3)$, $T(2,1,3)$ nalaze se na pravcima p odnosno q. Zato ravnina π prolazi polovištem spojnice ST, tj. točkom $M(1,2,3)$. Potrebno je još odrediti njen vektor normale. On mora biti okomit na vektor smjera $\mathbf{c}$ pravaca p i q, kao i na normalu $\mathbf{m}$ ravnine ρ određene pravcima p i q (skiciraj!). Kako je $\mathbf{m}=\mathbf{c}\times\overrightarrow{ST}$, to dobivamo

$$\mathbf{n}=\mathbf{c}\times(\mathbf{c}\times\overrightarrow{ST})=\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\overrightarrow{ST})-\overrightarrow{ST}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}).$$

Kako je $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{ST} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, slijedi $\mathbf{n} = -2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - 5(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -12\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$. Odavde $\pi \equiv -2x + y = 0$.

6.34. Odredi jednadžbu ortogonalne projekcije pravca $p \equiv \dfrac{x-7}{-8} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ na ravninu: a) $\pi \equiv 3x-y+z+2 = 0$; b) $\pi \equiv x-y+3z+7 = 0$.



Sl. 6.9.

RJEŠENJE. a) Potrebno je odrediti projekcije A' i B' dviju točaka A, B s pravca p na ravninu π i povući pravac p' kroz njih. Kako pravac p siječe ravninu π, to za točku A možemo odabrati njihov presjek, i tada je $A = A'$ (slika 6.9). Zadatak rastavljamo na sljedeće korake:

(i) Određujemo $A = p \cap \pi$. Vrijedi $\pi \equiv 3x-y+z+2 = 0$ i $p \equiv x = 7-8t$, $y = t$, $z = -1+3t$ i za $t = 1$ dobivamo presječnu točku $A' \equiv A(-1, 1, 2) = p \cap \pi$. **(ii)** Kroz točku $B \in p$ postavljamo pravac q okomit na ravninu π. Izaberemo $B(7, 0, -1) \in p$. Vektor smjera $\mathbf{c}$ pravca q je $\mathbf{c} = \mathbf{n} = (3, -1, 1)$, te je jednadžba pravca q

$$q \equiv x = 7 + 3t, \quad y = -t, \quad z = -1 + t.$$

i za $t = -2$ dobivamo presječnu točku $B'(1, 2, -3) = q \cap \pi$. **(iii)** pravac p' kroz A' i B' ima jednadžbu

$$p' \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5}.$$

b) Sada je pravac paralelan s ravninom i dovoljno je naći projekciju jedne točke s pravca na ravninu π. Uzmimo $B(7, 0, -1) \in p$ i pravac

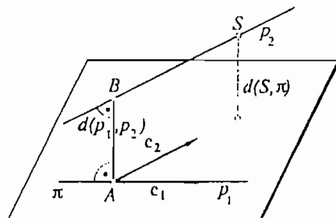
$$q \equiv x = 7 + t, \quad y = -t, \quad z = -1 + 3t$$

koji prolazi točkom B i okomit je na π. Presjek tog pravca i ravnine π daje projekciju $B'(6, 1, -4) = q \cap \pi$. Traženi pravac p' prolazi točkom B' i ima vektor smjera $\mathbf{c} = -8\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, te glasi

$$p' \equiv x = 6 - 8t, \quad y = 1 + t, \quad z = -4 + 3t.$$

6.35. Nadi najmanju udaljenost točaka s mimosmjernih pravaca

$$p_1 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \qquad p_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$



Sl. 6.10.

RJEŠENJE. Ako su $A \in p_1$, $B \in p_2$ točke na kojima se dostiže ta najmanja udaljenost, tada spojnica AB mora biti okomita i na pravac p_1 i na pravac p_2 (slika 6.10). Najmanju udaljenost možemo odrediti a da ne nalazimo te točke na kojoj se ona postiže.

Postavimo najprije ravninu π kroz pravac p_1, paralelnu s pravcem p_2. Njena normala $\mathbf{n}$ je okomita na vektore smjerova $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ zadanih pravaca a pripada joj i bilo koja točka, recimo $T(-1,0,1)$ s pravca p_1:

$$\mathbf{n} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\pi \equiv -2(x+1) - 2y + 2(z-1) = 0 \equiv x + y - z + 2 = 0.$$

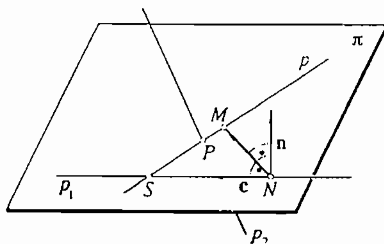
Udaljenost između pravaca p_1 i p_2 jednaka je udaljenosti bilo koje točke pravca p_2 do ravnine π. Umimo $S(0,-1,2) \in p_2$:

$$d(p_1,p_2) = d(S,\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(Za drugi način rješavanja vidi Zadatak 6.114.)

6.36. Točkom $M(1,1,0)$ položi pravac p koji siječe oba mimoilazna pravca:

$$p_1 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \text{ i } p_2 \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$



Sl. 6.11.

RJEŠENJE. Zadatak raščlanjujemo na sljedeće korake (slika 6.11): (i) Postavljamo ravninu π kroz točku M i pravac p_1. Uzmimo točku $N(-2,1,2)$ sa pravca p_1. Tada

je normala ravnine π dana sa

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{NM} \times \mathbf{c}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - j + 3\mathbf{k}$$

i odavde $\pi \equiv 2(x-1) - 1(y-1) + 3(z-0) = 0 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$. **(ii)** Određujemo presječnu točku P pravca p_2 i ravnine π. Vrijedi $p_2 \equiv x = 4 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = t$ i presjek s ravninom π se dobiva za $t = -1$, $P(1, -2, -1)$. **(iii)** Povlačimo traženi pravac p kroz točke M i P:

$$p \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

Taj pravac leži u ravnini π, siječe p_2 u točki P i, kako nije paralelan sa p_1, siječe i njega u nekoj točki S. Odredi njene koordinate!

6.4. Zadaci za vježbu

6.37. Napiši jednadžbu ravnine koja **a)** prolazi točkom $T(2, -1, 3)$ i koja je paralelna s vektorima $\mathbf{s}_1 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{s}_2 = (1, -2, 1)$; **b)** prolazi točkama $T(2, 1, -3)$, $S(0, -1, -2)$, paralelno s vektorom $\mathbf{s} = (2, -2, 1)$.

6.38. Napiši jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(-1, 2, 3)$ i koja je okomita na ravnine $\pi_1 \equiv x + 2y - z + 3 = 0$, $\pi_2 \equiv 3x + 2y = 0$.

6.39. Napiši jednadžbu ravnine koja: **a)** prolazi ishodištem i točkama $M(2, 1, 2)$, $N(-1, 1, 1)$; **b)** prolazi osi Oz i točkom $M(1, 2, 0)$.

6.40. Poznate su koordinate vrhova tetraedra $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 0)$, $C(2, 3, -2)$, $D(1, 2, 1)$. Napiši jednadžbe njegovih strana.

6.41. Odredi parametar α tako da točke $A(2, 1, 2)$, $B(1, 2, 2)$, $C(2, 2, 1)$, $D(3, 4, \alpha)$ leže u jednoj ravnini. Nađi jednadžbu te ravnine.

6.42. Odredi jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu $\pi \equiv x + 2y - 2z + 3 = 0$ i presjeca ju po pravcu koji leži u xOz ravnini.

6.43. Zadan je trokut ABC s vrhovima $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(-1, 3, 5)$. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi vrhom A, okomita je na ravninu trokuta i raspolavlja kut $\measuredangle(BAC)$.

6.44. Napiši jednadžbu ravnine koja: **a)** prolazi točkom $T(1, 2, 3)$ i odsjeca na koordinatnim osima odreske jednakih duljina; **b)** prolazi točkama $T(0, 0, 1)$, $S(9, 4, -1)$ i zatvara s koordinatnim ravninama tetraedar obujma 6.

6.45. Odredi jednadžbu pramena ravnina koje prolaze zadanim točkama $T_1(2, -1, 0)$, $T_2(1, 1, 2)$.

* * *

6.46. *Odredi udaljenost točke $T(2,-1,0)$ do ravnine $\pi \equiv x+y-z+2=0$.*

6.47. Odredi udaljenost između paralelnih ravnina a) $\pi_1 \equiv 2x+y-2z+3=0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-2z+9=0$; b) $\pi_1 \equiv 4x+3y-5z-8=0$, $\pi_2 \equiv 4x+3y-5z+12=0$.

6.48. Odredi jednadžbe ravnina koje su za 3 jedinice udaljene od ravnine $\pi \equiv x+3y-2z+1=0$.

6.49. Napiši jednadžbu ravnine koja sadrži sve točke jednako udaljene od dviju zadanih točaka $M(2,1,-1)$, $N(0,3,3)$.

6.50. Odredi kut među ravninama: a) $x+2y+2=0$, $2x-y+2z=0$; b) $3x-y-z=0$, $x+y+z-1=0$; c) $x+y+2z-3=0$, $2x+2y-2z+3=0$.

6.51. Točke $A(2,5,0)$, $B(1,6,2)$, $C(-1,4,1)$, $D(1,4,3)$ određuju tetraedar. Koliki kut zatvaraju strane ABC i ABD?

6.52. Kroz točku $A(2,-1,3)$ postavljene su dvije ravnine. Jedna od njih sadrži os Ox, a druga os Oy. Koliki je kut među njima?

* * *

6.53. Napiši jednadžbu pravca u kanonskom obliku:

a) $\begin{cases} 2x+3y-z+2=0, \\ 3x-y+2z+1=0. \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+3y+2z+3=0, \\ -x-2y+z=0. \end{cases}$

6.54. Napiši jednadžbu pravca u parametarskom obliku:

a) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x-3y-z+1=0 \end{cases}$.

6.55. Odredi kut među pravcima $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{3}$, $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-2}$.

6.56. Vrhovi trokuta su $A(1,1,1)$, $B(3,0,3)$, $C(-2,1,1)$. Odredi jednadžbu simetrale kuta $\measuredangle(BAC)$.

6.57. Vrhovi trokuta su $A(1,-2,-4)$, $B(3,1,-3)$, $C(5,1,-7)$. Napiši jednadžbu pravca na kojem leži visina trokuta spuštena iz vrha B.

6.58. Odredi kut što ga zatvaraju težišnica i visina spuštene iz vrha C u trokutu s vrhovima $A(2,1,-1)$, $B(2,0,1)$, $C(0,1,1)$.

6.59. Izračunaj visinu spuštenu iz vrha D tetraedra $ABCD$ s vrhovima $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$, $D(2,1,-4)$.

6.60. U prostoru je zadan tetraedar svojim vrhovima $A(0,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(0,3,0)$, $D(1,1,2)$. Odredi kut između visine tetraedra spuštene iz vrha D i visine trokuta ABD spuštene iz vrha D.

* * *

6.61. Odredi parametar m tako da pravac $\dfrac{x-2}{m}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{-4}$ leži u ravnini $4x-3y-6z+13=0$.

6.62. Odredi projekciju točke $T(2,4,3)$ na pravac $p \equiv x = t,\ y = -2t + 1,\ z = 2t - 2$.

6.63. Odredi ortogonalnu projekciju pravca $\dfrac{x-9}{-2} = \dfrac{y+7}{11} = \dfrac{z-4}{-10}$ na ravninu $2x + y - 2z - 3 = 0$.

6.64. Zadani su: točka $A(3,0,2)$, pravac $p \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ i ravnina $\pi \equiv 2x + 2y + 2z + 1 = 0$. Nađi točku T na pravcu p takvu da ravnina π raspolavlja spojnicu $\overline{AT}$.

6.65. Zadana je ravnina $\pi \equiv x - 2y + z = 0$ i pravac p kao presječnica dviju ravnina $\rho_1 \equiv 2x - 3y + z - 4 = 0$, $\rho \equiv x + y - z + 2 = 0$. Odredi jednadžbu pravca q koji leži u ravnini π, siječe pravac p i okomit je na njega.

6.66. Nađi ravninu koja ne siječe niti jedan od pravaca

$$p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}, \qquad q \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1},$$

a jednako je udaljena od svakog od njih.

6.67. Na pravcu $p \equiv \begin{cases} x + y - 3z + 6 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ odredi točke koje su udaljene od točke $T(1,0,1)$ za $d = \sqrt{8}$.

6.68. Odredi broj α tako da se pravci

$$p_1 \equiv \begin{cases} x = z - 3 \\ y = 3z \end{cases}, \qquad p_2 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\alpha}{1}$$

sijeku i nađi jednadžbu ravnine koja ih sadrži.

6.69. Napiši jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem $p_1 \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$, a paralelna je s pravcem $p_2 \equiv \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$.

6.70. Odredi parametar α tako da pravac određen sa

$$\begin{cases} 3x + y - z + \alpha = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

siječe os Ox.

6.71. Odredi parametre α, β tako da pravac određen sa

$$\begin{cases} x - \alpha y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - z + \beta = 0 \end{cases}$$

leži u ravnini $x + 2y - z - 2 = 0$.

6.72. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(1,0,7)$, siječe pravac $p_1 \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-3}{3}$ i okomit je na pravac $p_2 \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-2}$.

6.73. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(-3,1,1)$ i pravcem $p \equiv \begin{cases} z=0 \\ x+y-2z+3=0 \end{cases}$.

6.74. Na pravcu $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ nađi točku jednako udaljenu od ravnina $\pi_1 \equiv 3x+y+2z-1=0$, $\pi_2 \equiv x+2y+3z+1=0$.

6.75. Napiši jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$, a okomita je na ravninu $\pi \equiv 3x+2y-z-5=0$.

6.76. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem $p \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{-7}$ i raspolavlja dužinu AB određenu točkama $A(2,1,0)$, $B(-2,1,-2)$.

6.77. Na osi Oy nađi točku jednako udaljenu od ravnina $\pi_1 \equiv 3x-y+4z-1=0$, $\pi_2 \equiv x-5z+2=0$.

6.78. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi probodištem pravca $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{3}$ i ravnine $\pi \equiv 2x+y-z+5=0$, leži u ravnini π i okomit je na pravac p.

6.79. Odredi točku T na pravcu $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{-3}$ koja je jednako udaljena od točaka $A(2,1,7)$, $B(-4,3,1)$.

6.80. Odredi jednadžbu pravca paralelnog s pravcem $p \equiv \begin{cases} 2x+3y-z+5=0 \\ x-2y+3z+1=0 \end{cases}$ i koji prolazi točkom $M(1,1,2)$.

6.81. Odredi parametar m tako da pravac $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z}{2}$ bude okomit na presječnicu ravnina $\pi_1 \equiv x+2y-1=0$, $\pi_2 \equiv x-2z+2=0$.

* * *

6.82. Zadani su pravac $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-3}$, točka $A(1,-2,-1)$ na pravcu p i točka $T(6,1,-6)$. Odredi točku B na pravcu p tako da trokut ABT bude istokračan sa osnovicom $\overline{AB}$.

6.83. Zadane su točke $A(2,0,1)$, $B(4,2,0)$, pravac $p \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ i ravnina $\pi \equiv 2x+3y+4z-5=0$. Nađi točku C na pravcu p i točku D u ravnini π tako da bude $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

6.84. Odredi jednadžbu projekcije presječnice dviju ravnina $\pi_1 \equiv 2x-2y+z-1=0$, $\pi_2 \equiv 3x+y-z-2=0$ na koordinatnu ravninu yOz.

* * *

6.85. Zadani su pravci $p_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}$, $p_2 = \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-9}{-3}$. Odredi jednadžbu ravnine π s obzirom na koju su pravci p_1 i p_2 zrcalno simetrični.

6.86. Odredi točku B simetričnu točki $A(4,3,10)$ s obzirom na pravac $p \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

6.87. Odredi jednadžbu pravca simetričnog pravcu $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ s obzirom na ravninu $\pi \equiv -2y + z + 5 = 0$.

6.88. Zadan je pravac $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-1}$. Odredi pravac p' koji je zrcalna slika pravca s obzirom na ravninu a) xOy; b) $-x + 4y + 2z + 3 = 0$.

6.89. Odredi točku P' simetričnu točki $P(3,-1,1)$ s obzirom na ravninu određenu točkama $T_1(-2,-1,-1)$, $T_2(2,1,-5)$, $T_3(-4,-1,0)$.

6.90. Zadani su pravci $p_1 \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$, $p_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-11}{2}$. Odredi jednadžbu pravca p simetričnog pravcu p_2 s obzirom na ravninu π koja sadrži p_1 i paralelna je s p_2.

6.91. Odredi točku A' simetričnu točki $A(1,0,2)$ s obzirom na ravninu π određenu točkom $T(1,2,3)$ i pravcem $p \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{2}$.

6.92. Kroz točku $T(2,0,1)$ postavi pravac koji siječe pravac $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ i os Oy.

6.93. Točkom $S(-1,1,-1)$ položi pravac koji siječe mimoilazne pravce $p_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$ i $p_2 \equiv \frac{x}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{2}$.

6.94. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(3,-5,4)$ i presjeca pravce $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 4 \end{cases}$, $\begin{cases} y = -4x + 1 \\ z = x - 2 \end{cases}$.

6.95. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(4,0,-1)$, a siječe pravce $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{3}$, $q \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{9}$.

6.96. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(3,2,-1)$, a siječe i okomit je na pravac $p \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$.

* * *

6.97. Odredi točku T u koordinatnoj ravnini xOy za koju je zbroj udaljenosti do točaka $A(2,1,3)$, $B(-2,4,1)$ najmanji.

6.98. Zadane su točke $A(2,0,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(0,3,1)$. Odredi točku D na pravcu $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ tako da obujam tetraedra $ABCD$ bude 12.

6.99. Izračunaj površinu ortogonalne projekcije trokuta ABC na ravninu π, gdje je $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ i $\pi \equiv 2x+3y+z-1=0$.

6.100. U ravnini xOy nađi točku T za koju je zbroj udaljenosti do točaka $A(-2,2,4)$, $B(3,-5,8)$ najmanji.

6.101. Na pravcu $p_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$ odredi točku T koja je najbliža pravcu $p_2 \equiv \frac{x+5}{3} = \frac{y+8}{4} = \frac{z-1}{1}$.

* * *

6.102. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi pravcem $p \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}$, a od točke $T(1,2,1)$ je udaljena za $\sqrt{3}$ jedinice.

6.103. Odredi jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $T(2,1,-2)$, paralelna je s pravcem $p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}$ i udaljena od njega za $\sqrt{2}$ jedinica.

6.104. Odredi jednadžbe ravnina koje su paralelne s pravcima $p_1 \equiv \frac{x-1}{10} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{3}$, $p_2 \equiv \frac{x+2}{10} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+1}{3}$ i od njih udaljene za 10 jedinica.

6.105. Odredi udaljenost točke $T(2,1,3)$ do pravca $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

6.106. Odredi udaljenost dvaju pravaca: $p_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-10}{-3} = \frac{z-3}{4}$, $p_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

6.107. Odredi točku na pravcu $p \equiv x+y+2z-9=0$, $2x+y+3z-13=0$ koja je najbliža ishodištu.

6.108. Na pravcu $p \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-10}{-1}$ odredi točku A koja je najbliža pravcu $q \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+3}{2}$.

6.109. Izračunaj udaljenost dvaju paralelnih pravaca:

$$p_1 \equiv \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}, \qquad p_2 \equiv \left\{ \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4} \right.$$

* * *

6.110. Dokaži da je jednadžba ravnine koja prolazi točkom $T(x_1, y_1, z_1)$, a paralelna je s vektorima $\mathbf{c}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{c}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ dana sa

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6.111. Dokaži da jednadžba ravnine koja prolazi točkama $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$ glasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.112. Pokaži da pravci $p_1 \equiv \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$, $p_2 \equiv \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ leže u jednoj ravnini ako i samo ako vrijedi

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako glasi jednadžba te ravnine?

6.113. Pokaži da je udaljenost točke T do pravca $p = (S, \mathbf{c})$ dana sa

$$d(T, p) = \frac{|\mathbf{c} \times \overrightarrow{ST}|}{|\mathbf{c}|}.$$

6.114. Pokaži da je udaljenost dvaju mimoilaznih pravaca $p_1 = (T_1, \mathbf{c}_1)$, $p_2 = (T_2, \mathbf{c}_2)$ dana sa

$$d(p_1, p_2) = \frac{|\overline{T_1T_2} \cdot (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)|}{\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2|}.$$

7. Vektorski prostori

Neprazni skup X na kojemu su definirane dvije operacije, $+ : X \times X \to X$ i $\cdot : \mathbf{R} \times X \to X$ (**zbrajanje vektora** i **množenje skalara i vektora**) naziva se **vektorski prostor** ako vrijede sljedeća svojstva:

VP_1) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)\quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

VP_2) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X)\quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$;

VP_3) $(\exists \mathbf{0} \in X)(\forall \mathbf{x} \in X)\quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$;

VP_4) $(\forall \mathbf{x} \in X)(\exists \mathbf{x}' \in X)\quad \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

VP_5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X)\quad \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;

VP_6) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)\quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;

VP_7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in X)\quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;

VP_8) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Ukoliko znamo da je X vektorski prostor, neki njegov podskup W je i sam vektorski prostor (uz iste operacije definirane na X) ako vrijedi

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W)(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})\ \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in W.$$

7.1. Baza i dimenzija vektorskog prostora

Vektori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ su **linearno nezavisni** ako iz

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

slijedi da svi skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jednaki nuli.

Bazu vektorskog prostora X čini svaki skup $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektora tog prostora koji su linearno nezavisni i koji razapinju čitav prostor, tj. imaju svojstvo da se svaki vektor $\mathbf{x} \in X$ može napisati u obliku

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n.$$

Ovaj je prikaz jedinstven. Broj n naziva se **dimenzija prostora**.

7.1. Za realne funkcije f i g definiran je njihov zbroj sa $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ i množenje funkcije skalarom sa $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori:

a) skup svih funkcija na intervalu $[a,b]$;

b) skup svih ograničenih funkcija na segmentu $[a,b]$;

c) skup svih neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b]$;

d) skup svih funkcija definiranih na $\mathbf{R}$ takvih da je $f(0) = 1$;

e) skup svih funkcija def. na $\mathbf{R}$ takvih da je $2f(0) - 3f(1) = 0$;

f) skup svih funkcija def. na $\mathbf{R}$ takvih da je $f(1)+f(2)+\ldots+f(k) = 0$.

RJEŠENJE. a) Provjerimo vrijede li sva svojstva vektorskog prostora:

1) Komutativnost vrijedi zbog komutativnosti zbrajanja u skupu $\mathbf{R}$:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x), \quad \forall x \in [a,b],$$

zbog čega je $f+g = g+f$ za sve f i g.

2) Slično, asocijativnost vrijedi zbog asocijativnosti zbrajanja u $\mathbf{R}$.

3) Nul-funkcija $n(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ zadovoljava $f+n = n+f = 0$, $\forall f$.

4) Za svaku f postoji $-f$ definirana sa $(-f)(x) = -f(x)$ i vrijedi $f+(-f) = (-f)+f = n$.

5) Vrijedi i kompatibilnost množenja u skupu svih funkcija: $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha((\beta f)(x)) = \alpha\beta(f(x)) = ((\alpha\beta f))(x)$, $\forall x \in [a,b]$ pa je $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

6) Distributivnost množenja prema zbrajanju: $(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x)+\alpha g(x) = (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x) = (\alpha f+\alpha g)(x)$, $\forall x \in [a,b]$ pa je $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$.

7) Distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$: $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f+\beta f)(x), \forall x \in [a,b]$ pa je $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$.

8) Netrivijalnost množenja: $1 \cdot f = f$.

Dakle, skup svih funkcija čini vektorski prostor.

b) Dovoljno je provjeriti je li to potprostor vektorskog prostora svih funkcija. On to jest, jer je linearna kombinacija ograničenih funkcija na segmentu opet ograničena.

c) Da, linearna kombinacija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

d) Ne, jer ako je $f(0) = 1$ i $g(0) = 1$ onda je $(f+g)(0) = 1+1 = 2$, a također i $(\lambda f)(0) = \lambda$ pa linearna kombinacija funkcija iz tog skupa nije u njemu.

e) Da, jer ako je $2f(0) - 3f(1) = 0$ i $2g(0) - 3g(1) = 0$ onda je i $2(f+g)(0) - 3(f+g)(1) = 2(f(0)+g(0)) - 3(f(1)+g(1)) = 0+0 = 0$, a također i $2\lambda f(0) - 3\lambda f(1) = \lambda(2f(0) - 3f(1)) = 0$.

f) Da, jer linearna kombinacija takvih funkcija posjeduje isto svojstvo. Provjeri!

7.2. Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori (uz uobičajene operacije sa matricama) i ako jesu nađi im baze:

a) skup svih matrica;

b) skup svih matrica tipa $m \times n$ nad $\mathbf{R}$;

c) skup svih matrica tipa $m \times n$ nad $\mathbf{C}$;

d) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$;

e) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$;

f) skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

RJEŠENJE.

a) Ne, za matrice različitog tipa zbroj nije definiran,

b) Provjerimo sva svojstva vektorskog prostora:

1) Zbrajanje matrica je komutativno.

2) Zbrajanje matrica je asocijativno.

3) Nul-vektor je nul-matrica tipa $m \times n$.

4) Suprotan vektor je suprotna matrica $-\mathbf{A}$.

5) Množenje skalarom je kompatibilno $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

6) Množenje je distributivno prema zbrajanju u $\mathcal{M}_{mn}$: $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ jer su te matrice istog tipa i podudaraju se u općem elementu.

7) Množenje matrica je distributivno prema zbrajanju u $\mathbf{R}$: $(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$.

8) Množenje je netrivijalno $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Slijedi, $\mathcal{M}_{mn}$ je vektorski prostor. Bazu (kanonsku) ovog prostora čine matrice $\mathbf{E}_{ij}$ koje na svim mjestima imaju nulu, osim jedinice na mjestu (i, j), za $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. $\dim \mathcal{M}_{mn} = mn$.

c) Da, dokaz je identičan prethodnom.

d) Da, linearna kombinacija dviju matrica tipa 2×2 sa nulom na mjestu $(1, 1)$ je istog oblika i ima također nulu na istom mjestu pa je ovo potprostor vektorskog prostora $\mathcal{M}_{22}$. Jednu moguću bazu čini skup

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Ne, jer je $\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \alpha_1+\alpha_2 \\ \beta_1+\beta_2 & \gamma_1+\gamma_2 \end{bmatrix}$ pa zbroj dviju matrica iz ovog skupa nije u njemu.

f) Da, provjeri: linearna kombinacija matrica ovog oblika također matrica istog oblika. Baza čine npr. vektori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

7.3. Pokaži da vektori $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ tvore bazu za V^3 i prikaži vektor $6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$ u toj bazi.

RJEŠENJE. Prostor V^3 je trodimenzionalan pa ako su ova tri vektora linearno nezavisna razapinju čitav prostor V^3, odnosno tvore bazu za V^3. Provjerimo linearnu nezavisnost:

$$\alpha(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) + \beta(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{i}(\alpha+\beta+\gamma) + \mathbf{j}(\alpha+\beta+2\gamma) + \mathbf{k}(\alpha+2\beta+3\gamma) = \mathbf{0}.$$

Zbog linearne nezavisnosti $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mora biti

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Ovo je homogen sustav sa determinantom sustava različitom od nule. Slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, odnosno moguć je jedino trivijalan prikaz nul-vektora pomoću ovih vektora pa su oni linearno nezavisni. Traženje prikaza:

$$6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 14\mathbf{k} = \alpha(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \beta(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \gamma(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

svodi se na rješavanje sustava

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 6, \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 9, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 14. \end{cases}$$

čija rješenja su $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

7.4. Je li skup koji se sastoji od matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

baza za $\mathcal{M}_{22}$?

RJEŠENJE. Dimenzija prostora $\mathcal{M}_{22}$ je 4 pa je dovoljno provjeriti je li taj četveročlani skup linearno nezavisan. Pretpostavimo da postoji netrivijalan prikaz nul-matrice pomoću ovih matrica:

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_3 + \alpha_4\mathbf{A}_4 = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 & 3\alpha_2 \\ -2\alpha_2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & 4\alpha_3 \\ -5\alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4 & 4\alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Izjednačavajući odgovarajuće elemente na lijevoj i desnoj strani dobijemo sustav

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je jednoparametarsko

$$\alpha_1 = 4t, \quad \alpha_2 = -\tfrac{12}{11}t, \quad \alpha_3 = t, \quad \alpha_4 = -\tfrac{13}{11}t.$$

Dakle, postoji netrivijalan prikaz nul-matrice, pa je skup $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ linearno zavisan i ne tvori bazu za $\mathcal{M}_{22}$.

7.5. Dokaži da su skupovi simetričnih i antisimetričnih matrica iz $\mathcal{M}_{22}$ vektorski potprostori od $\mathcal{M}_{22}$. Nađi im bazu i dimenziju.

RJEŠENJE. Provjerimo je li ovo potprostor od $\mathcal{M}_{22}$. Trebamo vidjeli je li za simetrične matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}$ simetrična:

$$(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = (\alpha\mathbf{A})^{\mathsf{T}} + (\beta\mathbf{b})^{\mathsf{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \beta\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}.$$

Simetrična matrica iz $\mathcal{M}_{22}$ je oblika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa kanonsku bazu potprostora simetričnih matrica čine matrice $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ i dimenzija mu je 3.

Za $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ antisimetrične matrice je:

$$(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = (\alpha\mathbf{A})^{\mathsf{T}} + (\beta\mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \alpha\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \beta\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \alpha(-\mathbf{A}) + \beta(-\mathbf{B}) = -(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}),$$

pa je i $\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}$ antisimetrična, odnosno i antisimetrične čine potprostor od $\mathcal{M}_{22}$. Svaka antisimetricna je oblika $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ i jedini element baze je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; ovaj prostor je jednodimenzionalan.

7.6. Zadan je skup $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \mid x_1 = x_3 = x_5, \quad x_2 - x_4 = 2x_1 - x_3\}$. Dokaži da je V potprostor od $\mathbf{R}^5$ i nađi mu bazu i dimenziju.

RJEŠENJE. Uzmimo bilo koje $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Provjerimo je li njihova linearna kombinacija $\alpha x + \beta y$ u skupu V.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + \beta(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4, \alpha x_5 + \beta y_5) \end{aligned}$$

Vrijedi $\alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha x_5 + \beta y_5$ zbog $x_1 = x_3 = x_5$, $y_1 = y_3 = y_5$ i $\alpha x_2 + \beta y_2 - (\alpha x_4 + \beta y_4) = 2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_3 + \beta y_3)$ zbog $x_2 - x_4 = 2x_1 - x_3$, $y_2 - y_4 = 2y_1 - y_3$. Dakle $\alpha x + \beta y \in V$ pa je V potprostor od $\mathbf{R}^5$.

Za bilo koji $x \in V$ je

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, 2x_1 - x_1 + x_4, x_1, x_4, x_1) \\ &= (x_1, x_1 + x_4, x_1, x_4, x_1) = (x_1, x_1, x_1, 0, x_1) + (0, x_4, 0, x_4, 0) \\ &= x_1(1,1,1,0,1) + x_4(0,1,0,1,0). \end{aligned}$$

Vektori $\{(1,1,1,0,1), (0,1,0,1,0)\}$ čine bazu i $\dim V = 2$.

7.7. Neka je $V = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbf{R}^{10} \mid \sum_{i=1}^{10} x_i = 0\}$. Dokaži da je V potprostor od $\mathbf{R}^{10}$, nađi mu bazu, dimenziju te nađi koordinate vektora $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5)$ u toj bazi.

RJEŠENJE. Svaki element iz V je oblika $(x_1, x_2, \dots, x_9, -x_1 - x_2 - \dots - x_9)$ pa je jedna od mogućih baza

$\{(1,0,0,\dots,0,-1),(0,1,0,\dots,0,-1),(0,0,1,\dots,0,-1),\dots,(0,0,0,\dots,1,-1)\}$

Zato je $\dim V = 9$. Označimo vektore baze sa $e_1, e_2, \dots, e_9$. Imamo:

$$(1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,5,-5) = \sum_{i=1}^{9} \alpha_i e_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9, -\sum_{i=1}^{9} \alpha_i e_i)$$

odnosno $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = -2$, $\alpha_5 = 3$, $\alpha_6 = -3$, $\alpha_7 = 4$, $\alpha_8 = -4$, $\alpha_9 = 5$.

7.2. Promjena baze

Neka su $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ (stara) i $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ (nova) dvije po volji odabrane baze u prostoru X. Vektor $\mathbf{x}$ ima u te dvije baze prikaze

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Sa $\mathbf{T}$ označavamo matricu prijelaza iz stare u novu bazu

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + \dots + t_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Stupci matrice $\mathbf{T}$ predstavljaju komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare baze. Sada se komponente vektora $\mathbf{x}$ transformiraju na način $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'$, ili, drukčije zapisano

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \qquad \forall i.$$

To znači da je $\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$. Ove komponente nalazimo obično kao rješenja linearnoga sustava

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

7.8. Vektor $\mathbf{x}$ u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ ima prikaz $\mathbf{x} = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$. Odredi mu prikaz u bazi $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}\}$.

RJEŠENJE. Matrica prijelaza iz stare u novu bazu je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Komponente vektora $\mathbf{x}$ u novoj bazi $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma)$ dobijemo iz $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$,

odnosno rješavanjem sustava

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Slijedi $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

7.9. Odredi komponente vektora $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ i $\mathbf{y} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ u novom (zarotiranom) sustavu sa bazom $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

RJEŠENJE. Matrica prelaza iz kanonske u zarotiranu bazu je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Matrica je reda 2 pa je umjesto rješavanja sustava $\mathbf{T}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ jednostavnije izračunati njen inverz:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.10. Dokaži da je skup svih polinoma $\mathcal{P}$ (uz standardne operacije zbrajanja funkcija i množenja skalarom) vektorski prostor, a skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n njegov vektorski potprostor, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Nađi mu kanonsku bazu. Specijalno za $n = 3$ dokaži da je skup 1, $t-1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$ baza za $\mathcal{P}_3$ i rastavi polinome $p(t) = t^3 - 4t^2 + 8t - 3$ i $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ u toj bazi.

RJEŠENJE. $\mathcal{P}$ je potprostor svih funkcija na $\mathbf{R}$ jer je linearna kombinacija dvaju polinoma opet polinom. Slično i za $\mathcal{P}_n$. Elementi kanonske baze su im redom $1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots$ i $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ ($\mathcal{P}$ je beskonačnodimenzionalan, dok je

dim $\mathscr{P}_n = n + 1$). Npr. za $\mathscr{P}_n$ jasno je da se svaki polinom može napisati pomoću elemenata baze, a njihova linearna nezavisnost slijedi iz

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0 \quad \forall t \in \mathrm{R} \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Provjerimo je li skup sa elementima 1, $t-1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$ baza za $\mathscr{P}_3$:

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1(t-1) + \alpha_2(t-1)^2 + \alpha_3(t-1)^3 = 0,$$

odnosno

$$(\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3)t + (\alpha_2 - 3\alpha_3)t^2 + \alpha_3 t^3 = 0.$$

Izjednačavajući koeficijente uz potencije od t sa nulom dobijemo homogen sustav sa determinantom sustava različitom od nule pa je $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dakle promatrani skup je linearno nezavisan, kardinalni broj mu je jednak dimenziji $\mathscr{P}_3$ pa je i sam baza za $\mathscr{P}_3$.

Uvedimo oznake $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t - 1$, $p_2(t) = (t-1)^2$, $p_4(t) = (t-1)^3$ i nađimo matricu prijelaza iz zadane baze u kanonsku bazu:

$$\begin{aligned} 1 &= p_0, \\ t &= p_0 + p_1, \\ t^2 &= p_0 + 2p_1 + p_2, \\ t^3 &= p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3. \end{aligned}$$

Koeficijenti sa desne stane svake jednakosti točno u tom poretku čine stupce matrice prijelaza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada ovu matricu množimo sa $[-3 \;\; 8 \;\; -4 \;\; 1]$ (koeficijenti polinoma u zadanoj bazi). Imamo

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2p_0 + 3p_1 - p_2 + p_3.$$

Slično je i

$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d-c-b+a \\ c-2b+3a \\ b-3a \\ a \end{bmatrix}$$

$$= (d + c + b + a)p_0 + (c + 2b + 3a)p_1 + (b + 3a)p_2 + ap_3.$$

7.3. Zadaci za vježbu

7.11. Čine li vektori $b_1 = (1,1,0,1)$, $b_2 = (2,1,3,1)$, $b_3 = (1,1,0,0)$, $b_4 = (0,1,-1,-1)$ bazu od $\mathbf{R}^4$?

7.12. Pokaži da vektori $\mathbf{e}_1 = (2,1,-3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,2,-5)$ i $\mathbf{e}_3 = (1,-1,1)$ čine bazu za $\mathbf{R}^3$ i prikaži vektor $\mathbf{x} = (6,2,-7)$ u toj bazi.

7.13. Pokaži da vektori $\mathbf{e}_1 = (1,2,-1,-2)$, $\mathbf{e}_2 = (2,3,0,-1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,1,4)$ i $\mathbf{e}_4 = (1,3,-1,0)$ čine bazu za $\mathbf{R}^4$ i prikaži vektor $\mathbf{x} = (7,14,-1,2)$ u toj bazi.

7.14. Dokaži da je $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ potprostor od $\mathbf{R}^4$. Nađi mu bazu i dimenziju.

7.15. Čine li svi vektori:

a) oblika $(\alpha,\beta,\alpha,\beta,\dots)$,

b) sa cjelobrojnim koordinatama,

potprostore od $\mathbf{R}^n$?

7.16. Jesu li sljedeći skupovi vektorski prostori:

a) skup svih diferencijabilnih funkcija na $[a,b]$,

b) skup svih funkcija takvih da je $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$,

c) skup svih funkcija takvih da je $f(a) = 0$ za neki $a \in \mathbf{R}$,

d) skup svih funkcija takvih da je $f(a) = 1$ za neki $a \in \mathbf{R}$,

e) skup svih funkcija takvih da je $\lim_{x\to a+0} = \infty$, za neki $a \in \mathbf{R}$?

7.17. Dokaži da vektori $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ i $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}-5\\7\\-3\end{bmatrix}$ čine dvije baze za V^3. Odredi matricu prijelaza iz prve baze u drugu.

7.18. Izračunaj matricu prijelaza iz baze prostora $\mathbf{R}^4$ s elementima $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,1,3)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,2,2)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,3)$ u bazu sa elementima $\mathbf{b}_1 = (3,-5,7,2)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,8,-6,5)$, $\mathbf{b}_3 = (1,0,1,3)$, $\mathbf{b}_4 = (2,2,2,2)$.

7.19. Dokaži da su $\left\{\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&4\\1&-4&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&-1&2\\1&0&-2\\-2&2&0\end{bmatrix}\right\}$ i $\left\{\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&3&5\\-3&0&2\\-5&-2&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&3\\0&-3&0\end{bmatrix}\right\}$ dvije baze za prostor antisimetričnih matrica reda 3. Izračunaj matricu prijelaza iz prve baze u drugu.

7.20. Dokaži da su $\{t-t^2, t^3, 1+5t+t^3, (1+t)^3\}$ i $\{(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3\}$ dvije baze za $\mathscr{P}_3$ i izračunaj matricu prijelaza iz prve baze u drugu.

7.21. Izračunaj matricu prijelaza iz baze $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ u bazu $\{1, t-c, (t-c)^2, \dots, (t-c)^n\}$ od $\mathscr{P}_n$.

7.22. Dokaži da su skupovi gornjih trokutastih, donjih trokutastih, simetričnih i antisimetričnih matrica reda n potprostori od $\mathscr{M}_n$. Nađi im bazu i dimenziju.

7.23. Nađi bazu i dimenziju potprostora razapetim vektorima

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7.24. Neka su L i M vektorski potprostori od V. (Tada je i $L \cap M$ potprostor od V.) Definiramo $L+M$ kao potprostor razapet unijom baza od L i M. ($L \cup M$ općenito nije potprostor od V.) Dokaži da vrijedi

$$\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M).$$

7.25. Neka su $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ i $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_l\}$ baze za M i L vektorske potprostore od $\mathbf{R}^n$. Nađi bazu za potprostor $M \cap L$.

7.26. U $\mathbf{R}^4$ zadani su potprostori M sa bazom

$$B_M = \{(1,1,1,1), (1,1,-1,-1), (1,-1,1,-1)\}$$

i L sa bazom

$$B_L = \{(1,-1,-1,1), (2,-2,0,0), (3,-1,1,1)\}.$$

Nađi bazu za $L \cap M$.

7.27. Nađi bazu za sumu i presjek potprostora od $\mathscr{P}_3$ razapetim sa $1+2t+t^3$, $1+t+t^2$, $t-t^2+t^3$ i $1+t^2$, $1+3t+t^3$, $3t-t^2+t^3$.

7.28. Dokaži da je $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x = \bar{y}\}$ potprostor od realnog vektorskog prostora $\mathbf{C}^3$ i nađi mu bazu i dimenziju. Uoči da to nije kompleksan potprostor (kompleksnog vektorskog prostora $\mathbf{C}^3$).

8. Linearni operatori

8.1. Prikaz operatora

Neka su X i Y vektorski prostori. Preslikavanje $A : X \to Y$ naziva se **linearni operator** ako za njega vrijedi

$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X)(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 A(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{x}_2). \tag{1}$$

Uvjet (1) naziva se uvjet **linearnosti**. On je ekvivalentan s uvjetima **aditivnosti** i **homogenosti**, tj. (1) vrijedi onda i samo onda ako je ispunjeno

$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X) \quad A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2), \tag{2}$$

$$(\forall \mathbf{x} \in X)(\forall \alpha \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Neka je $\mathbf{e}_1 \dots, \mathbf{e}_n$ baza u prostoru X, a $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ baza u prostoru Y. Iz prikaza

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{e}_1) &= a_{11}\mathbf{f}_1 + a_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{f}_m,\\
A(\mathbf{e}_2) &= a_{12}\mathbf{f}_1 + a_{22}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{f}_m,\\
&\vdots\\
A(\mathbf{e}_n) &= a_{1n}\mathbf{f}_1 + a_{2n}\mathbf{f}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{f}_m.
\end{aligned}$$

dobiva se matrica $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

koja predstavlja prikaz operatora u paru zadanih baza. Vidimo da j-ti stupac matrice $\mathbf{A}$ čine komponente vektora $A(\mathbf{e}_j)$ po bazi $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$.

8.1. Je li navedeno preslikavanje linearan operator ?

a) $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 \quad A(x,y,z) = (|x|, 0)$;

b) $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \quad A(x,y) = x \cdot y$;

c) $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \quad A(x,y,z) = (x, x+y, x-2z)$.

RJEŠENJE. a) Ne, jer nije ispunjen uvjet aditivnosti

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (|x_1+y_1|, 0) \neq (|x_1| + |y_1|, 0) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}).$$

b) Ne, jer nije ispunjen uvjet homogenosti

$$A(\lambda\mathbf{x}) = A(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 x_1 x_2 \neq \lambda x_1 x_2 = \lambda A(\mathbf{x}).$$

c) Za $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ je

$$\begin{aligned} A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 - 2(\alpha x_3 + \beta y_3)) \\ &= \alpha(x_1, x_1 + x_2, x_1 - 2x_3) + \beta(y_1, y_1 + y_2, y_1 - 2y_3) \\ &= \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

A jest linearan operator. Primijeti da su komponente funkcije linearne kombinacije komponenti od $\mathbf{x}$. Vrijedi: tada i samo tada su preslikavanja $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ linearni operatori.

8.2. Pokaži da je s formulom $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$ definiran linearan operator $A : V^3 \to V^3$ i nađi mu matricu u bazi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ako je $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

RJEŠENJE. Provjerimo svojstva linearnog operatora:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &= ((\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = A(\mathbf{x}_1) + A(\mathbf{x}_2), \\ A(\lambda\mathbf{x}) &= (\lambda\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} = \lambda A(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

pa A jest linearni operator.

Tražimo mu matricu u bazi $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{i}) &= (\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}))(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \\ A(\mathbf{j}) &= (\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}))(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \\ A(\mathbf{k}) &= (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}))(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Koeficijente slika elemenata baze upisujemo u stupce matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

8.3. Neka je $A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ operator deriviranja, definiran sa $A(p) = p'$. Dokaži da je to linearan operator i nađi mu matricu u kanonskoj bazi.

RJEŠENJE. Vrijedi $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ pa A jest linearni operator. Potražimo slike elemenata baze:

$$\begin{aligned} p(t) &= 1, & p'(t) &= 0 \\ p(t) &= t, & p'(t) &= 1 \\ p(t) &= t^2, & p'(t) &= 2t \\ p(t) &= t^3, & p'(t) &= 3t^2 \end{aligned}$$

Matrica operatora A u kanonskoj bazi $\{1, t, t^2, t^3\}$ je $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8.4. Operator $A : \mathscr{P}_3 \to \mathbf{R}^2$ definiran je sa $A(p) = (p(0), p(1))$. Dokaži da je A linearan operator i nađi mu matricu u paru kanonskih bazi $\{1, t, t^2, t^3\}$, $\{(1,0), (0,1)\}$.

RJEŠENJE. Vrijedi $A(at^3 + bt^2 + ct + d) = (d, a + b + c + d)$. Sada se lako provjere svojstva aditivnosti i homogenosti:

$$\begin{aligned} A(p_1 + p_2) &= A((a_1 + a_2)t^3 + (b_1 + b_2)t^2 + (c_1 + c_2)t + (d_1 + d_2)) \\ &= (d_1 + d_2, a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2) \\ &= (d_1, a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (d_2, a_2 + b_2 + c_2 + d_2) \\ &= A(p_1) + A(p_2), \\ A(\lambda p) &= A(\lambda a t^3 + \lambda b t^2 + \lambda c t + \lambda d) \\ &= (\lambda d, \lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d) = \lambda(d, a + b + c + d) \\ &= \lambda A(p). \end{aligned}$$

Za matricu operatora trebamo njegovo djelovanje na bazi: $A(1) = (1,1)$, $A(t) = (0,1)$, $A(t^2) = (0,1)$, $A(t^3) = (0,1)$ pa je matrica operatora u zadanim bazama

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.5. Neka je $A : \mathscr{M}_{22} \to \mathscr{M}_{22}$ operator transponiranja tj. $A(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^\top$. Dokaži da je to linearan operator i nađi mu matricu u kanonskoj bazi $\left\{ \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ prostora $\mathscr{M}_{22}$.

RJEŠENJE. U jednom koraku dokazujemo aditivnost i homogenost:

$$\begin{aligned} A(\alpha \mathbf{M}_1 + \beta \mathbf{M}_2) &= (\alpha \mathbf{M}_1 + \beta \mathbf{M}_2)^\top = (\alpha \mathbf{M}_1)^\top + (\beta \mathbf{M}_2)^\top \\ &= \alpha (\mathbf{M}_1)^\top + \beta (\mathbf{M}_2)^\top = \alpha A(\mathbf{M}_1) + \beta A(\mathbf{M}_2). \end{aligned}$$

Sada tražimo slike elemenata baze

$$A(\mathbf{E}_1) = A\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{E}_1, \quad A(\mathbf{E}_2) = A\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{E}_3,$$

$$A(\mathbf{E}_3) = A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{E}_2, \quad A(\mathbf{E}_4) = A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{E}_4.$$

Koeficijente ovih slika u raspisu po elementima baze upisujemo u stupce matrice operatora:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

8.6. Za sljedeće linearne operatore iz V^3 u V^3 nađi matrični zapis u ortonormiranoj bazi:

a) homotetiju $h(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$;

b) zrcaljenje na ravnini razapetoj vektorima $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ odnosno $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ i $\mathbf{k}, \mathbf{i}$;

c) zrcaljenje na pravcima određenim sa $\mathbf{i}$ odnosno $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$;

d) operator ortogonalnog projiciranja na ravnine pod **b)** ;

e) operator ortogonalnog projiciranja na pravce pod **c)** .

RJEŠENJE. Za svaki operator tražimo djelovanje na bazi, a zatim dobivene koeficijente redom zapisujemo u stupce matrice opertora.

a) $h(\mathbf{i}) = \lambda\mathbf{i}$, $h(\mathbf{j}) = \lambda\mathbf{j}$, $h(\mathbf{k}) = \lambda\mathbf{k}$, i matrica operatora homotetije je

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

b) $A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $A(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$, $A(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}$ i slično za preostale dvije ravnine. Matrice operatora zrcaljenja na ravnini su

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

c) $A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $A(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}$, $A(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}$ i slično za preostala dva pravca. Matrice operatora zrcaljenja na tim pravcima su

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

d) $A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $A(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$, $A(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$ i slično za preostale dvije ravnine. Matrice operatora ortogonalnog projiciranja na zadane ravnine su

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

e) $A(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $A(\mathbf{j}) = \mathbf{0}$, $A(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$. Slično za preostala dva pravca. Matrice operatora ortogonalnog projiciranja na zadane pravce su

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.7. Nađi matricu operatora zrcaljenja na ravnini $x + y - z = 0$ u kanonskoj bazi za V^3.

RJEŠENJE. Tražimo djelovanje operatora na bazi. Simetrična točka točki $(1, 0, 0)$ s obzirom na ravninu $x + y - z = 0$ je $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (provjeri računom!) pa je $A(\mathbf{i}) = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Nadalje simetrična za $(0, 1, 0)$ je $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ i simetrična za $(0, 0, 1)$ $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Slijedi $A(\mathbf{j}) = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ i $A(\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$. Zato je matrica operatora u kanonskoj bazi $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(Uoči, ravnina mora sadržavati ishodište $(0, 0, 0)$ inače ovo ne bi bio linearan operator zbog $A(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.)

8.8. Nađi matricu operatora ortogonalnog projiciranja na ravninu $x + y + z = 0$.

RJEŠENJE. Vrijedi $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{n} \mid \mathbf{x})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$, gdje je $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ vektor normale ravnine $x + y = z = 0$. Zato je:

$$A(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{n} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k},$$
$$A(\mathbf{j}) = \mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{n} = -\tfrac{1}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k},$$
$$A(\mathbf{k}) = \mathbf{k} - \tfrac{1}{3}\mathbf{n} = -\tfrac{1}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k},$$

odakle slijedi

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.2. Promjena baze. Slične matrice

Neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora A u bazi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ te $\mathbf{A}'$ matrica istoga operatora u drugoj bazi $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$. Prijelaz iz stare u novu bazu opisan je matricom prijelaza

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

čiji su stupci komponente vektora nove baze prikazanih pomoću vektora stare. Veza između matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ dana je formulom

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}.$$

kažemo da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ slične matrice.

8.9. Linearan operator $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ u bazi $\{\mathbf{a}_1 = (1,2), \mathbf{a}_2 = (1,1)\}$ ima matrični zapis $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Nađi mu matricu $\mathbf{A}'$ u bazi $\{\mathbf{b}_1 = (2,3), \mathbf{b}_2 = (0,1)\}$.

RJEŠENJE. Prikažimo prvo vektore $\mathbf{b}_1$ i $\mathbf{b}_2$ pomoću vektora prve baze $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Odavde je $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ i $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$. Tražimo djelovanje operatora na drugoj bazi:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_1) &= f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 + (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) \\ &= \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + \tfrac{3}{2}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \\ f(\mathbf{b}_2) &= f(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_1) - f(\mathbf{a}_2) \\ &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2) = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Matrica operatora u drugoj bazi je $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Traženu matricu možemo odrediti i na drugi način: matrica prijelaza iz stare baze $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ u novu $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ je $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, dok je matrica prijelaza iz nove baze u staru $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Vrijedi:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.10. Linearan operator $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ima u bazi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\mathbf{A}'$ matricu istog operatora u bazi $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3' = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3$.

RJEŠENJE. Matrica prijelaza iz stare u novu bazu je

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Obratno, matrica prijelaza iz nove u staru je njena inverzna

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Slijedi matrica u bazi $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 18 & -3 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.3. Algebra operatora

Ako su $A : X \to Y$ i $B : Y \to Z$ linearni operatori, tada je definirana kompozicija $B \circ A$ koju označavamo kratko s kratko s BA. To je linearni operator s matricom koja je jednaka umnošku $\mathbf{BA}$ matrica početnih operatora.

Slika operatora A je skup svih $\mathbf{y} \in Y$ za koje postoji $\mathbf{x} \in X$ takav da je $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. To je vektorski potprostor od Y dimenzije r, gdje je r rang pripadne matrice $\mathbf{A}$. **Jezgra** ili **nulpotprostor** operatora A je skup svih $\mathbf{x} \in X$ za koje vrijedi $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. To je potprostor od X dimenzije $n - r$. Ovaj se broj naziva **defekt operatora**.

8.11. Nađi rang i defekt operatora deriviranja $A : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$, $A(p) = p'$.

RJEŠENJE. Rang operatora jednak je rangu njegove matrice u bilo kojoj bazi. Matrica ovog operatora u kanonskoj bazi (slično kao u Zad. 8.3.) je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

To je matrica reda $n+1$ i njen rang je n. Slijedi $r(A) = n$. Po teoremu o rangu i defektu je $d(A) = \dim \mathscr{P}_n - r(A) = n + 1 - n = 1$.

8.12. Zadani su operatori lijevog i desnog pomaka $A, B : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$,

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_2, x_3),$$

$$B(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0).$$

Odredi matricu u kanonskoj bazi za svaki od operatora A, B, $A \circ B$, $B \circ A$. Također svakom nađi bazu za jezgru.

RJEŠENJE. Kanonska baza za $\mathbf{R}^4$ se sastoji od vektora $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)$, pa vrijedi $A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $A(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $A(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4$, $A(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$; $B(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$, $B(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$, $B(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$, $B(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_3$. Matrice operatora A i B su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice kompozicija ovih operatora dobijemo množenjem matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbog jednostavnog oblika ovih matrica direktno vidimo $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}B \circ A = L\{\mathbf{e}_4\}$ i $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}A \circ B = L\{\mathbf{e}_1\}$.

8.13. Neka je $A : \mathscr{M}_{22} \to \mathscr{M}_{22}$ linearan operator zadan sa $A(\mathbf{X}) = \mathbf{BX} - \mathbf{XB}$ gdje je $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Nađi mu rang i defekt i po jednu bazu za $\mathrm{Ker}A$ i $\mathrm{Im}A$.

RJEŠENJE. Tražimo opći element jezgre $\mathrm{Ker}A$ u obliku $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ c+d & 2c \end{bmatrix}$$

Izjednačavanjem elemenata dobije se $a = c + d$ i $b = 2c$.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} c+d & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Baza jezgre je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, a dimenzija $d(A) = 2$.

$r(A) = 4 - d(A) = 2$. Za bazu slike od A nadopunimo $\mathrm{Ker}A$ do baze za $\mathscr{M}_{22}$ npr. sa matricama $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (provjeri da čine linearno nezavisan skup). Baza slike je tada $\{A(\mathbf{E}_1), A(\mathbf{E}_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8.4. Minimalni polinom

Minimalni polinom matrice $\mathbf{A}$ je polinom oblika

$$\mu(\lambda) = \lambda^k - \mu_1\lambda^{k-1} - \ldots - \mu_{k-1}\lambda - \mu_k.$$

i takav da je polinom najmanjega stupnja koji poništava matricu $\mathbf{A}$:

$$\mu(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k - \mu_1\mathbf{A}^{k-1} - \ldots - \mu_{k-1}\mathbf{A} - \mu_k\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

Može se računati po sljedećoj tablici:

$\mathbf{I}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}^2$	$\ldots$	$\mathbf{A}^m$	$\ldots$
	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\ldots$	$\mathbf{A}_{1m}$	$\ldots$
		$\mathbf{A}_{22}$	$\ldots$	$\mathbf{A}_{2m}$	$\ldots$
				$\ldots$	
				$\mathbf{A}_{mm}$	$\ldots$

Matrice u prvome redu dobivamo računanjem potencija zadane matrice $\mathbf{A}$. Matrice u drugome redu dobivamo iz prethodnoga reda, po formulama:

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A} - \beta_{11}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}^2 - \beta_{12}\mathbf{I}, \ldots \qquad \mathbf{A}_{1m} = \mathbf{A}^m - \beta_{1m}\mathbf{I}.$$

Pri tom koeficijente β_{1j} određujemo tako da sve te matrice na istome mjestu (obično mjestu $(1,1)$) imaju nul-element.

Treći red računamo formulama

$$\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{12} - \beta_{22}\mathbf{A}_{11}, \ldots \qquad \mathbf{A}_{2m} = \mathbf{A}_{1m} - \beta_{2m}\mathbf{A}_{11}.$$

Pri tom zahtijevamo da sve ove matrice imaju na drugom mjestu također nul-element. Nastavljanjem ovoga postupka na koncu ćemo dobiti nul-matricu. Iz nje možemo odrediti minimalni polinom.

8.14. Izračunaj minimalni polinom matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

RJEŠENJE. U prvom redu su matrice $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$. U drugom redu sa $\mathbf{I}$ poništavamo elemente na mjestu $(1,1)$ pa je

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A} - 7\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}^2 - 81\mathbf{I}.$$

Treći redak, zbog $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0}$, ne trebamo niti pisati.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^2 \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & -15 & -1 \\ -4 & -1 & -15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zato je $\mathbf{0} = \mathbf{A}_{12} - 0 \cdot \mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}^2 - 81\mathbf{I}$ i $\mu(\lambda) = \lambda^2 - 81$.

8.15.

Izračunaj minimalni polinom matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & - & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Istim postupkom kao u prethodnom zadatku su u prvom retku $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$. U drugom retku poništavamo sa $\mathbf{I}$ elemente na mjestu $(1,1)$ pa imamo

$$\mathbf{A}_{11}=\mathbf{A}-\mathbf{I},\quad \mathbf{A}_{12}=\mathbf{A}^2-\mathbf{I},\quad \mathbf{A}_{13}=\mathbf{A}^3-2\mathbf{I},\quad \mathbf{A}_{14}=\mathbf{A}^4-3\mathbf{I}.$$

U trećem retku sa matricom $\mathbf{A}_{11}$ poništavamo elemente na mjestu $(1,3)$:

$$\mathbf{A}_{22}=\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}_{11},\quad \mathbf{A}_{23}=\mathbf{A}_{13},\quad \mathbf{A}_{24}=\mathbf{A}_{14}-\mathbf{A}_{11}.$$

U četvrtom sa $\mathbf{A}_{22}$ poništavamo elemente $(1,2)$:

$$\mathbf{A}_{33}=\mathbf{A}_{23}-\mathbf{A}_{22},\quad \mathbf{A}_{34}=\mathbf{A}_{24}.$$

I u petom retku dobijemo nul-matricu

$$\mathbf{A}_{44}=\mathbf{A}_{34}-\mathbf{A}_{33}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\mathbf{0}=\mathbf{A}_{44}&=\mathbf{A}_{34}-\mathbf{A}_{33}=\mathbf{A}_{24}-(\mathbf{A}_{23}-\mathbf{A}_{22})=\mathbf{A}_{24}-\mathbf{A}_{23}+\mathbf{A}_{22}\\&=(\mathbf{A}_{14}-\mathbf{A}_{11})-\mathbf{A}_{23}+(\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}_{11})=\mathbf{A}_{14}-\mathbf{A}_{13}+\mathbf{A}_{12}-2\mathbf{A}_{11}\\&=(\mathbf{A}^4-3\mathbf{I})-(\mathbf{A}^3-2\mathbf{I})+(\mathbf{A}^2-\mathbf{I})-2(\mathbf{A}-\mathbf{I})=\mathbf{A}^4-\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2-2\mathbf{A},\end{aligned}$$

odnosno, minimalni polinom je $\mu(\lambda)=\lambda^4-\lambda^3+\lambda^2-2\lambda$.

8.5. Zadaci za vježbu

8.16. Jesu li sljedeća preslikavanja $A:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ linearni operatori:

a) $A(x,y,z)=(y,x-3,z)$;
b) $A(x,y,z)=(2z+x,2xz,x-y)$;
c) $A(x,y,z)=(0,0,0)$;
d) $A(x,y,z)=(0,x+3y,y^2)$;
e) $A(x,y,z)=(0,0,1)$;
f) $A(x,y,z)=(\sin x,\cos y,z)$;
g) $A(x,y,z)=(z,y,x)$?

8.17. Operator $A:\mathbf{R}^4\to\mathscr{M}_{22}$ zadan je sa djelovanjem na kanonskoj bazi $A(\mathbf{e}_1)=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$, $A(\mathbf{e}_2)=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix}$, $A(\mathbf{e}_3)=\begin{bmatrix}5&1\\6&-1\end{bmatrix}$, $A(\mathbf{e}_4)=\begin{bmatrix}0&0\\2&-3\end{bmatrix}$. Nađi mu matricu u paru kanonskih bazi.

8.18. Nađi matricu operatora u bazi $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ koji preslikava vektore:

a) $\mathbf{a}_1=(0,0,1)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,1)$ redom u vektore $\mathbf{b}_1=(2,3,5)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,1,-1)$;
b) $\mathbf{a}_1=(2,3,5)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,2)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,0)$ redom u vektore $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,1,-1)$, $\mathbf{b}_3=(2,1,2)$;
c) $\mathbf{a}_1=(2,0,3)$, $\mathbf{a}_2=(4,1,5)$, $\mathbf{a}_3=(3,1,2)$ redom u vektore $\mathbf{b}_1=(1,2,-1)$, $\mathbf{b}_2=(4,5,-2)$, $\mathbf{b}_3=(1,-1,1)$.

8.19. Nađi matricu operatora $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ zadanog sa

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + 3x_3)$$

u kanonskoj bazi.

8.20. Neka je $\mathbf{a}$ neki vektor iz V^3. Dokaži da je sa $f : V^3 \to V^3$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ zadan linearan operator. Nađi mu matricu u bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

8.21. Neka je $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Operatoru $A : V^3 \to V^3$, $A(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ odredi matricu u kanonskoj bazi, rang i defekt.

8.22. Neka su $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ konstantni vektori iz V^3. Sa $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b}$ zadan je linearan operator $f : V^3 \to V^3$. Odredi mu matricu u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

8.23. Linearan operator f ima u bazi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ matrični zapis $\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$. Nađi mu matricu u bazi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ gdje su $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

8.24. Linearan operator $\mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ ima u kanonskoj bazi $\{1, t, t^2\}$ matricu $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Odredi mu matricu u bazi $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + 3t + 2, 2t^2 + t + 1\}$.

8.25. Linearan operator f u bazi s elementima $\mathbf{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\mathbf{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\mathbf{a}_3 = (9, -3, 7)$ ima matricu $\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$. Nađi mu matricu u bazi $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ gdje su $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 2)$.

8.26. Neka je $\mathbf{A}$ matrica operatora u nekoj bazi i $\mathbf{T}$ matrica prijelaza u novu bazu. Odredi matricu $\mathbf{A}'$ u novoj bazi ako je:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8.27. Operator A u bazi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ ima matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj mu matricu u bazi:

a) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$;

b) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$.

8.28. Neka je $A : V^2 \to V^2$ linearan operator zrcaljenja na pravcu $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}x$. Odredi mu matricu u bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Dokaži da je to involutoran operator, tj. da je $A \circ A$ identiteta (koristeći matricu operatora A).

8.29. Odredi matricu operatora ortogonalnog projiciranja na:

a) pravac $x = y = z$;

b) ravninu koja sadrži vektore $\mathbf{a} = (-1, 1, -1)$ i $\mathbf{b} = (1, -3, 2)$.

8.30. Odredi matricu operatora simetrije (zrcaljenja) na:

a) pravcu $x = 2y = z$;

b) ravnini koja sadrži vektore $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ i $\mathbf{b} = (1, 1, -2)$.

8.31. Neka je linearan operator $A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ zadan sa $A(p(t)) = (t \cdot p(t))'$. Nađi mu matricu u kanonskoj bazi za $\mathscr{P}_3$ $\{1, t, t^2, t^3\}$.

8.32. Zadan je operator $A : \mathbf{R}^2 \to \mathscr{M}_{22}$ sa $A(x, y) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$. Dokaži linearanost i injektivnost ovog operatora. Odredi njegovu matricu u paru kanonskih bazi za $\mathbf{R}^2$ i $\mathscr{M}_{22}$.

8.33. Zadan je operator $A : \mathbf{R}^3 \to \mathscr{M}_{22}$ sa $A(x, y, z) = \begin{bmatrix} y & z \\ -z & x \end{bmatrix}$. Dokaži linearnost i injektivnost ovog operatora. Odredi njegovu matricu u paru kanonskih bazi za $\mathbf{R}^3$ i $\mathscr{M}_{22}$.

8.34. Zadani su linearni operatori:
$A : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$, $A(p(t)) = p'(t)$ i $B : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_3$, $B(p(t)) = t \cdot p(t)$.
Nađi matrice operatora A, B, $A \circ B$ i $B \circ A$ u kanonskim bazama za $\mathscr{P}_3$ odnosno $\mathscr{P}_2$. Nađi im i rang i defekt.

8.35. Neka je $A : \mathscr{M}_{22} \to \mathscr{M}_{22}$, $A(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^\mathrm{T}$ linearan operator transponiranja matrica reda 2. Nađi mu matricu u kanonskoj bazi od $\mathscr{M}_{22}$, rang i defekt.

8.36. Linearan operator $A : \mathscr{M}_{22} \to \mathscr{M}_{22}$ zadan je formulom

$$A(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M})\mathbf{I},$$

gdje je $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ jedinična matrica reda 2. Odredi mu matricu u kanonskoj bazi za $\mathscr{M}_{22}$, rang i defekt.

8.37. Linearni operatori $A, B : \mathscr{M}_{22} \to \mathscr{M}_{22}$ su zadani sa

$$A(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\mathbf{M}, \quad B(\mathbf{M}) = \mathbf{M}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Odredi im matrice u kanonskoj bazi za $\mathscr{M}_{22}$.

8.38. Odredi matricu operatora deriviranja $A : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $A(p) = p'$ u bazi

$$\{1, t-c, \frac{(t-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(t-c)^n}{n!}\},$$

gdje je $c \in \mathbf{R}$.

8.39. Skup svih funkcija oblika $e^{\lambda t}p(t)$ gdje je $\lambda \in \mathbf{R}$, $p(t) \in \mathcal{P}_n$ je vektorski prostor. Dokaži! Linearnom operatoru deriviranja na tom prostoru odredi matricu u bazi $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$.

8.40. Nađi rang i defekt operatora u zadacima 8.2., 8.4. i 8.6.

8.41. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $f : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$, $f(\mathbf{T}) = \mathbf{TA} - \mathbf{AT}$ linearan operator. Izračunaj mu matricu u kanonskoj bazi, dimenziju i bazu za jezgru i sliku.

8.42. Izračunaj minimalni polinom za matrice

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & & -4 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

8.43. Neka su X i Y konačnodimenzionalni vektorski prostori i $\dim X = \dim Y$. Dokaži da su za linearan operator $A : X \to Y$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(i) A je bijekcija,

(ii) A je injekcija,

(iii) A je surjekcija.

8.44. Dokaži da za svaki linearni operator $A : V^3 \to V^3$ postoje vektori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ tako da je

$$A(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{i} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{j} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})\mathbf{k}.$$

8.45. Je li $A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definiran sa $A(z) = \bar{z}$ linearan operator (nad $\mathbf{C}$) ?

8.46. Neka je $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ linearan operator i $\operatorname{tr} A = 0$ (preciznije, trag matrice pridružene tom operatoru u bilo kojoj bazi je 0). Dokaži da postoji baza u kojoj A ima samo nule na dijagonali.

9.

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

9.1. Karakteristični polinom i svojstvene vrijednosti

Neka je $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ kvadratna matrica reda n. Skalar $\lambda \in \mathbf{R}$ se zove **svojstvena vrijednost** matrice $\mathbf{A}$ ako postoji vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ takav da vrijedi

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

Za vektor $\mathbf{v}$ kažemo da je **svojstveni vektor** matrice $\mathbf{A}$ koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Polinom $\kappa(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ zove se **karakteristični polinom** matrice $\mathbf{A}$. Nultočke tog polinoma svojstvene su vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

9.1. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo najprije karakteristični polinom

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ je

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Njegove su nul-točke $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. To su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$. **Za svaku od njih treba naći pripadni svojstveni vektor, rješavajući homogeni sustav** $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

a) Za $\lambda_1 = 2$ imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x_2 = -x_1.$$

Odavde $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$ za bilo koju vrijednost $t \neq 0$. Biramo $t = 1$. Prvi svojstveni vektor je $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Za $\lambda_2 = 3$ sustav glasi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x_2 = -2x_1 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

9.2. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Najprije računamo matricu

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 5 & 0 & 8 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -5 & -8 \\ -5 & \lambda & -8 \\ -8 & -5 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ je

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -5 & -8 \\ -5 & \lambda & -8 \\ -8 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 129\lambda - 520.$$

Njegove su nul-točke $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 13$. Bilo koju od njih odredimo pretražujući cjelobrojne faktore slobodnog člana 520 (pretpostavljamo da je bar jedna nul-točka cjelobrojna). Recimo da smo provjerili da je -5 nul točka. Dijeljenjem polinoma s članom $(\lambda + 5)$ dobivamo

$$\lambda^3 - 129\lambda - 520 = (\lambda + 5)(\lambda^2 - 5\lambda - 104).$$

Nakon toga se lako odrede preostale dvije nul-točke.

Potražimo svojstvene vektore.

a) Za $\lambda_1 = -8$ imamo

$$\begin{bmatrix} -8 & -5 & -8 \\ -5 & -8 & -8 \\ -8 & -5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odnosno, dobivamo sustav

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

čije je rješenje $x_1 = -\frac{8}{13}t$, $x_2 = -\frac{8}{13}t$, $x_3 = t$. Dakle, $\mathbf{v}_1 = [-\frac{8}{13}t, -\frac{8}{13}t, t]^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Izabiremo $t = -13$, što daje $\mathbf{v}_1 = [8, 8, -13]^T$.

b) Za $\lambda_2 = -5$ sustav glasi

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 & -8 \\ -5 & -5 & -8 \\ -8 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

čije rješenje je $x_1 = x_3 = t$ i $x_2 = -\frac{13}{5}t$. Dakle, $v_2 = [t, -\frac{13}{5}t, t]^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Uzimamo $t = 5$ i $v_2 = [5, -13, 5]^T$.

c) Za $\lambda_3 = 13$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 13 & -5 & -8 \\ -5 & 13 & -8 \\ -8 & -5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ili

$$\begin{cases} 13x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

čije rješenje je $x_1 = x_2 = x_3 = t$, odnosno $v_3 = [t, t, t]^T$, $t \in \mathbf{R}$. Uzimamo $t = 1$ i $v_3 = [1, 1, 1]^T$.

9.3. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Karakteristični polinom je

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-5 & 2 \\ -4 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0.$$

Eventualne cjelobrojne nul-točke mogu biti samo cjelobrojni djelitelji broja 18. Provjeravajući unutar skupa $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$, brzo otkrivamo da je jedna nul točka $\lambda_1 = 2$ (ili možda pogodimo $\lambda_2 = 3$). Nakon toga je lako odrediti potpunu faktorizaciju: $\kappa(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$. Stoga je i $\lambda_3 = 3$.

Prva svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 2$ je jednostruka. Njoj će odgovarati jedan svojstveni vektor. Provjeri da je to $v_1 = [1, 2, 4]^T$.

Druga svojstvena vrijednost je dvostruka, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Svojstveni potprostor koji odgovara ovoj svojstvenoj vrijednosti može biti jednodimenzionalan ili možda dvodimenzionalan. To znači da ćemo sigurno dobiti barem jedan odgovarajući svojstveni vektor, ali nismo unaprijed sigurni da će ih biti onoliko kolika je kratnost svojstvene vrijednosti.

Iz sustava $(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i dobivamo opće rješenje u obliku

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, ipak postoje dva linearno nezavisna svojstvena vektora:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9.2. Dijagonalizacija operatora. Matrične funkcije

Ako postoji baza koju čine linearno nezavisni svojstveni vektori, tada je matrica slična dijagonalnoj (kažemo još da se pripadni operator dade dijagonalizirati). Svojstvene vektore zapišimo kao stupce matrice prijelaza $\mathbf{T}$. Matrica operatora u novoj bazi je dijagonalna

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dijagonalni elementi su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Ako je $\mathbf{A}$ slična dijagonalnoj i f funkcija definirana na spektru (skupu svojstvenih vrijednosti) od $\mathbf{A}$, tada se matrična funkcija $f(\mathbf{A})$ računa na način

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{T}f(\mathbf{D})\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}.$$

9.4. Svedi na dijagonalni oblik matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Ovo je matrica iz prošlog primjera. Ona ima dvije različite svojstvene vrijednosti, jednostruku $\lambda_1 = 2$ i dvostruku $\lambda_{2,3} = 3$. Odgovarajući svojstveni vektori su

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tako dobivamo matricu $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ova matrica dijagonalizira početnu matricu $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\mathbf{T}^{-1}$ i uvjeri se direktnim množenjem u istinitost ove jednakosti.

9.5. Svedi na dijagonalni oblik matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Problem je ekvivalentan pronalaženju tri svojstve vrijednosti i odgovarajućih svojstvenih vektora (ukoliko postoje!). Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ je

$$\begin{aligned} \kappa(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i). \end{aligned}$$

Ovaj polinom nema tri realne nul-točke, zato se matrica ne da dijagonalizirati. Međutim, možemo nastaviti u polju kompleksnih brojeva: matrica ima tri različite svojstvene vrijednosti u $\mathbf{C}$ i može se svesti na dijagonalni oblik. Za $\lambda_1 = 1$ svojstveni vektor je $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, za $\lambda_2 = i$ je $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$, za $\lambda_3 = -i$ je $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$.

Primijeti da se za realnu matricu svojstvene vrijednosti koje nisu realne uvijek pojavljuju u paru kao konjugirano kompleksni brojevi, a pripadajući svojstveni vektori su također (po komponentama) konjugirano kompleksni.

Dakle, tražena baza se sastoji od vektora $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i u njoj je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalana $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$.

9.6. Izračunaj $\mathbf{A}^{100}$ gdje je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Dijagonalizirajmo matricu $\mathbf{A}$:

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Korijeni su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$. Nađimo svojstvene vektore:

Za $\lambda_1 = 3$ iz $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ imamo $3x_1 = 2x_2$, odnosno $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Za $\lambda_2 = 2$ iz $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ imamo $2x_1 = 2x_2$, odnosno $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matricu **T** formiramo tako da su joj stupci redom svojstveni vektori od **A**, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Njena inverzna je $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ je dijagonalna matrica (sa svojstvenim vrijednostima od **A** na dijagonali).

Neka je $f(\lambda) = \lambda^{100}$. Trebamo

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{100} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & 2 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} \\ 3 \cdot 2^{100} - 3 \cdot 3^{100} & 3 \cdot 3^{100} - 2 \cdot 2^{100} \end{bmatrix}.$$

* * *

Ako je neka svojstvena vrijednost višestruka, odgovarajući svojstveni potprostor može biti manje dimenzije nego što je kratnost svojstvene vrijednosti. U tom slučaju svojstveni vektori neće činiti bazu. Tada tražimo pridružene svojstvene vektore i matricu svodimo na **Jordanovu formu**.

Pridruženi svojstveni vektori traže se iz jednadžbi

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})v_2 = -v_1,$$
$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})v_3 = -v_2,$$
$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})v_4 = -v_3,$$
$$\vdots$$

gdje je v_1 svojstveni vektor matrice.

Ako postoji nekoliko linearno nezavisnih vektora koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti, tada je korisno umjesto v_1 u gornjoj jednadžbi staviti njihovu linearnu kombinaciju s privremeno neodređenim koeficijentima. Te ćemo koeficijente odrediti tako da jednadžba ima rješenje.

9.7. Odredi Jordanovu formu matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo svojstvene vrijednosti

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Vidimo da je $\lambda = 3$ dvostruka svojstvena vrijednost. Pripadne svojstvene vektore dobivamo iz sustava

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni potprostor je samo jednodimenzionalan. Stoga matrica nije slična dijagonalnoj. Moramo potražiti pridruženi svojstveni vektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 - 2x_2 = -1 \Longrightarrow \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vrijednost parametra s možemo uzeti po volji. Stavimo $s = 0$ i odavde $\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Matrica prijelaza i njoj inverzna glase

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, Jordanova forma ima oblik

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Primijeti da Jordanovu formu možemo napisati i bez množenja gornjih matrica. Množenjem samo provjeravamo je li račun ispravno sproveden.

* * *

Znajući Jordanovu formu možemo definirati **matričnu funkciju**, na sljedeći način. Ako je $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$ veza matrice i njene Jordanove forme, $\sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ spektar matrice $\mathbf{A}$ i $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija definirana u točkama spektra, tada se $f(\mathbf{A})$ definira formulama

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) := \mathbf{T}f(\mathbf{J})\mathbf{T}^{-1}.$$

Tu je $f(\mathbf{J})$ dijagonalna blok-matrica koja na dijagonalnim blokovima koji odgovaraju elementarnim klijetkama ima matrice oblika

$$f(\mathbf{J}_1) := \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \frac{1}{3!}f'''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(g) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda) \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Na primjer, za klijetku reda 3 vrijedi

$$f(\mathbf{J}_1) := \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

9.8. Odredi Jordanovu formu i zatim potenciju $\mathbf{A}^{100}$ matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Karakteristični je polinom

$$\kappa(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3.$$

Svojstvena vrijednost $\lambda = 1$ je trostruka. Potražimo svojstvene vektore

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uzimamo $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Svojstveni je potprostor jednodimenzionalan. Trebamo pronaći dva pridružena svojstvena vektora. Prvi nalazimo iz jednadžbe $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stavljamo $s = 0$ i odavde $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Drugi pridruženi vektor sad tražimo iz uvjeta $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = -\mathbf{v}_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stavimo ponovo $s = 0$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Time smo dobili matricu prijelaza

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njena inverzna matrica je

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prikaz matrice s pomoću Jordanove forme glasi:

$$\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo

$$f(\mathrm{A}) = \mathrm{T}f(\mathrm{J})\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{T}\begin{bmatrix} f(1) & f'(1) & \frac{1}{2}f''(1) \\ 0 & f(1) & f'(1) \\ 0 & 0 & f(1) \end{bmatrix}\mathrm{T}^{-1}.$$

U zadatku je $f(\lambda) = \lambda^{100}$, $f'(\lambda) = 100\lambda^{99}$, $f''(\lambda) = 9900\lambda^{98}$. Konačno dobivamo

$$\mathrm{A}^{100} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 100 & 4950 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4751 & -9600 & 4850 \\ 4850 & -9799 & 4950 \\ 4950 & -10000 & 5051 \end{bmatrix}.$$

9.3. Hamilton-Cayleyev teorem

9.9. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem izračunaj A^3 i A^{-1} za matricu

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

RJEŠENJE. Prvo tražimo karakteristični polinom za matricu A

$$\kappa(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ -3 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 13\lambda + 19.$$

Po Hamilton-Cayleyevom teoremu je $\kappa(\mathrm{A}) = 0$, tj. $\mathrm{A}^3 - \mathrm{A}^2 - 13\mathrm{A} + 19\mathrm{I} = 0$. Odavde je

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^3 &= \mathrm{A}^2 + 13\mathrm{A} - 19\mathrm{I} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & 15 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 19\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 35 & 40 \\ -10 & 11 & 23 \\ 35 & 19 & -30 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da bi dobili A^{-1} pomnožimo jednakost $\mathrm{A}^3 - \mathrm{A}^2 - 13\mathrm{A} + 19\mathrm{I} = 0$ sa A^{-1}. Imamo $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 13\mathrm{I} + 19\mathrm{A}^{-1} = 0$, odnosno

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{-1} &= -\frac{1}{19}(\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 13\mathrm{I}) \\ &= -\frac{1}{19}\left(\begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 13\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & 5 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

9.10. Nađi matricu $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ drugog reda, s realnim koeficijentima, koja zadovoljava jednadžbu $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$.

RJEŠENJE. Polinom $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ poništava matricu $\mathbf{A}$. Karakteristični polinom matrice $\mathbf{A}$ je realan polinom drugog stupnja. Kako je $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$, slijedi da je $\kappa(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Po Hamilton-Cayleyevom teoremu vrijedi $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$. Odavde za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ imamo:

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobijemo:

$$\begin{aligned} a(a+1) + bc + 1 &= 0 \\ b(a+d+1) &= 0 \\ c(a+d+1) &= 0 \\ cb + d(d+1) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Za $b = c = 0$ slijedi $a^2 + a + 1 = 0$ pa $a \notin \mathbf{R}$. Zato mora biti $a + d + 1 = 0$, tj. $d = -1 - a$. Iz četvrtog uvjeta slijedi $bc + (-a-1)(-a) + 1 = 0$ što je jednadžba identična prvoj. To znači da jedan broj, recimo b, možemo odabrati po volji, a za drugi tada vrijedi $c = -\dfrac{a^2+a+1}{b}$. Prema tome, opći oblik ovakve matrice je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2+a+1}{b} & -a-1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

9.4. Zadaci za vježbu

9.11. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.12. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

g) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

9.13. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

9.14. Izračunaj svojstvene vektore i dijagonalnu matricu sličnu zadanoj:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{bmatrix}$.

9.15. Odredi matricu prijelaza i Jordanovu formu matrice:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

9.16. Odredi matricu prijelaza i Jordanovu formu matrice:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

* * *

9.17. Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora transponiranja matrica reda 2 ($A : \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$, $A(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^\top$).

9.18. Odredi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice operatora $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $A(p(t)) = (t \cdot p(t))'$.

9.19. Odredi svojstvene vrijednosti operatora

$$A : \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}, \qquad A(\mathbf{M}) = \mathrm{tr}(\mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}$$

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda 2.

9.20. Neka je $A : V_2 \to V_2$ linearan operator zrcaljenja s obzirom na pravac $y = (\tan \frac{\pi}{6})x$. Odredi mu svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore.

* * *

9.21. Dokaži da su a) trag, b) determinanta, c) karakteristični polinom invarijante sličnosti, tj. da slične matrice imaju isti trag, determinantu i karakteristični polinom.

9.22. Za matricu $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ nađi karakteristični polinom pa pokaži direktnim računom da ga matrica A poništava.

9.23. Dokaži da za $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{22}$ vrijedi $\mathrm{A}^2 - (\operatorname{tr} \mathrm{A})\mathrm{A} + (\det \mathrm{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

9.24. Koristeći jednakost za matrice reda 2

$$\mathrm{A}^2 - (\operatorname{tr} \mathrm{A})\mathrm{A} + (\det \mathrm{A})\mathrm{I} = \mathbf{0}$$

pokaži da ne postoji $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{22}$ takva da je $\mathrm{A}^2 \neq \mathbf{0}$ i $\mathrm{A}^3 = \mathbf{0}$. (Općenitije: ne postoji $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{22}$ takva da je $\mathrm{A}^2 \neq \mathbf{0}$ i $\mathrm{A}^k = \mathbf{0}$ za $k \geqslant 3$, $k \in \mathrm{N}$.)

9.25. Ako je -2 svojstvena vrijednost matrice $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A}$, dokaži da je -4 svojstvena vrijednost za A^4.

9.26. Neka je F linearan operator za kojeg vrijedi $F^2 = -F$. Koji brojevi mogu biti njegove svojstvene vrijednosti?

9.27. Ako su $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ svojstveni vektori operatora F pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima onda $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ nije svojstveni vektor od F. Dokaži!

9.28. Pokaži ako je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor za F onda je i svojstveni vektor za F^n, $\forall n \in \mathrm{N}$. Kako se odnose odgovarajuće svojstvene vrijednosti?

9.29. Dokaži: ako je F regularan operator i λ svojstvena vrijednost za F onda je λ^{-1} svojstvena vrijednost za F^{-1}. U kakvom su odnosu pripadni svojstveni vektori?

10.
Skalarni produkt. Dijagonalizacija simetrične matrice

10.1. Skalarni produkt

Skalarni produkt (**umnožak**) vektora $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ iz prostora $\mathbf{R}^n$ označavamo s $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})$ i definiramo formulom

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) := x_1y_1 + \dots + x_ny_n. \qquad (1)$$

Duljina (**norma**) vektora računa se formulom

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \qquad (2)$$

Dva su vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ **okomita**, (**ortogonalna**) ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

Općenitije, skalarni produkt na (realnom) vektorskom prostoru X je funkcija $(\cdot\,|\,\cdot) : X \times X \to \mathbf{R}$ sa svojstvima

1) $(\forall \mathbf{x} \in X)\ (\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}) \geqslant 0,\ (\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0.$
2) $(\forall \alpha \in \mathbf{R})\ (\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\,|\,\alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}).$
3) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X)\ \ (\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = (\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}).$
4) $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X)\ \ (\mathbf{x} + \mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\,|\,\mathbf{z}) + (\mathbf{y}\,|\,\mathbf{z}).$

10.1. Provjeri da su sljedeće funkcije skalarni produkti:

a) Neka su $c_1, \dots, c_n$ pozitivni brojevi, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ iz prostora $\mathbf{R}^n$;

$$(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = c_1x_1y_1 + c_2x_2y_2 + \dots + c_nx_ny_n.$$

b) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{M}_n(\mathrm{R})$, $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) := \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})$.

RJEŠENJE. Ispitajmo vrijede li svojstva skalarnog produkta:

a) 1.) Pozitivnost. $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 \geqslant 0$, $\forall \mathbf{x}$. Nadalje, $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}) = 0$ ako i samo ako je $x_i = 0$ za svaki i, tj. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2.) Homogenost. Vrijedi $(\alpha\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})$, $\forall\alpha \in \mathbf{R}$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ jer je

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i x_i y_i.$$

3.) Komutativnost. Očigledno je $(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}) = (\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

4.) Aditivnost. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\,|\,\mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1\,|\,\mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2\,|\,y)$, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}$ zbog distributivnosti množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$.

Dakle ovo jest skalarni produkt u $\mathbf{R}$.

b) Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrica reda n.

1.) $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0$, $\forall \mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. Ako je $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{A}) = 0$ po prethodnom mora biti $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$, odnosno $a_{ij} = 0$, $\forall i,j$, što je ekvivalentno sa $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

2.) $(\alpha\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\alpha\mathbf{A}\mathbf{B}^\top) = \alpha\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\top) = \alpha(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B})$, $\forall a \in \mathbf{R}$, $\forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$.

3.) $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\top) = \mathrm{tr}((\mathbf{A}\mathbf{B}^\top)^\top) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^\top) = (\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A})$, $\forall \mathbf{A},\mathbf{B}$.

4.) $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2\,|\,\mathbf{B}) = \mathrm{tr}((\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{B}^\top) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}_1\mathbf{B}^\top + \mathbf{A}_2\mathbf{B}^\top) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}_1\mathbf{B}^\top) + \mathrm{tr}(\mathbf{A}_2\mathbf{B}^\top) = (\mathbf{A}_1\,|\,\mathbf{B}) + (\mathbf{A}_2\,|\,\mathbf{B})$, $\forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$.

Dakle, na ovaj način definiran je skalarni produkt u prostoru svih matrica reda n nad $\mathbf{R}$.

10.2. Dokaži da su sljedeće funkcije skalarni produkti:

a) $(f\,|\,g) := \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$, na prostoru neprekinutih realnih funkcija na intervalu $[a,b]$.

b) $(p\,|\,q) := \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\rho(t)dt$, na prostoru polinoma $\mathscr{P}$, gdje je $\rho(t) > 0$ tzv. težinska funkcija.

RJEŠENJE. a) 1.) $(f\,|\,f) = \int_a^b f^2(t) \geqslant 0$, $\forall f$, jer je integral pozitivne neprekinute funkcije na intervalu uvijek pozitivan. Integral takve funkcije može biti nula ako i samo ako je funkcija identički jednaka nuli pa je $(f\,|\,f) = 0 \iff f \equiv 0$.

2.) $(\alpha f\,|\,g) = \alpha(f\,|\,g)$, $\forall\alpha \in \mathbf{R}$, $\forall f,g$ je ekvivalentno (istinitoj) tvrdnji: "konstantu pod integralom smijemo izlučiti ispred integrala".

3.) Očevidno vrijedi $(f\,|\,g) = (g\,|\,f)$.

4.) Svojstvo $(f_1 + f_2\,|\,g) = (f_1\,|\,g) + (f_2\,|\,g)$, $\forall f_1, f_2, g$ vrijedi jer je integral aditivna funkcija.

Tako smo provjerili da je ovom formulom definiran skalarni produkt na prostoru svih neprekidnih, realnih funkcija na intervalu $[a,b]$.

b) Polinomi su realne i neprekidne funkcije na $\mathbf{R}$ pa i na intervalu $[-1,1]$. Zato je ovo modifikacija primjera a). Težinska funkcija ima utjecaj u izračunavanju *vrijednosti* skalarnoga produkta, ali ne i u njegovim svojstvima.

* * *

Ako je X vektorski prostor nad poljem C kompleksnih brojeva, svojstva 2) i 3) vektorskoga produkta se mijenjaju u:

2') $(\alpha \mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = (\mathrm{x} \mid \bar{\alpha}\mathrm{y})$.

3') $(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \overline{(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})}$.

10.3. Dokaži da su sljedeće funkcije skalarni produkti

a) $(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$, na prostoru $\mathbf{C}^n$.

b) $(f \mid g) := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$, na prostoru funkcija neprekinutih na intervalu $[a, b]$ i s vrijednostima u C. Tu je $\rho(t) > 0$, $\forall t$.

RJEŠENJE. **a)** 1).$(\mathrm{x} \mid \mathrm{x}) = \sum_{i=1}^n x_i\bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geqslant 0$, $\forall \mathrm{x}$. Također, $(\mathrm{x} \mid \mathrm{x}) = 0$ onda i samo onda ako je $x_i = 0$, $\forall i$, tj. $\mathrm{x} = \mathbf{0}$.

2.) $(\alpha \mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i\bar{y}_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i = \alpha(\mathrm{x} \mid \mathrm{y})$, $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{C}^n$.

3.) $(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i = \sum_{i=1}^n \overline{\bar{x}_i y_i} = \overline{\sum_{i=1}^n y_i\bar{x}_i} = \overline{(\mathrm{y} \mid \mathrm{x})}$, $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y}$.

4.) Očito vrijedi $(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \mid \mathrm{y}) = (\mathrm{x}_1 \mid \mathrm{y}) + (\mathrm{x}_2 \mid \mathrm{y})$, $\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{y}$, zbog distributivnosti množenja prema zbrajanju u C.

b) Svojstva se provjeravaju na sličan način.

10.4. Neka je L neprazan podskup vektorskog prostora X. Definiramo **ortogonalni komplement** $L^\perp$ kao skup svih vektora iz V koji su okomiti na svaki vektor iz L, tj. $L^\perp = \{\mathrm{x} \in V : (\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = 0, \forall \mathrm{y} \in L\}$. Kraće kažemo skup svih vektora okomitih na L. Dokaži da je $L^\perp$ potprostor od X.

RJEŠENJE. Neka su $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in L^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $\mathrm{y} \in L$. Tada je

$$(\alpha \mathrm{x}_1 + \beta \mathrm{x}_2 \mid \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}_1 \mid \mathrm{y}) + \beta(\mathrm{x}_2 \mid \mathrm{y}) = 0 + 0 = 0$$

pa slijedi $\alpha \mathrm{x}_1 + \beta \mathrm{x}_2 \in L^\perp$. Kako su $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{y}, \alpha, \beta$ odabrani po volji, $L^\perp$ je vektorski potprostor od X.

10.5. Vektorski potprostor L zadan je homogenim sustavom

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Nađi jednadžbu koja određuje ortogonalni komplement $L^\perp$.

RJEŠENJE. Rješenje ovoga sustava je (provjeri!)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in L^\perp$ mora biti okomit na bilo koji vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in L$, tj. mora biti $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 0$. L je razapet vektorima $(6, -9, -1, 0)$ i $(3, -4, 0, 2)$ pa je $L^\perp$ zadan jednadžbama

$$\begin{cases} 6y_1 - 9y_2 - y_3 = 0, \\ 3y_1 - 4y_2 + 2y_4 = 0. \end{cases}$$

10.6. Neka je L potprostor vektorskog prostora V. Dokaži da se svaki vektor $\mathbf{x} \in V$ može na jedinstven način prikazati u obliku $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ pri čemu je $\mathbf{y} \in L$ i $\mathbf{z} \in L^\perp$.

Zato sljedeća definicija ima smisla: vektor $\mathbf{y}$ zovemo **ortogonalna projekcija** vektora $\mathbf{x}$ na potprostor L, a $\mathbf{z}$ **ortogonalna komponenta** vektora $\mathbf{x}$ s obzirom na potprostor L.

RJEŠENJE. Neka je $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l\}$ ortonormirana baza potprostora L i $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{l} c_i\mathbf{a}_i$ rastav od $\mathbf{y}$ u toj bazi. Množeći ovu jednakost skalarno sa $\mathbf{a}_j$ dobivamo $(\mathbf{y} \mid \mathbf{a}_j) = c_j(\mathbf{a}_j \mid \mathbf{a}_j) = c_j$. $\mathbf{z}$ mora biti okomit na svaki $\mathbf{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Zato je $(\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_j) = (\mathbf{y}+\mathbf{z} \mid \mathbf{a}_j) = (\mathbf{y} \mid \mathbf{a}_j) + (\mathbf{z} \mid \mathbf{a}_j) = (\mathbf{y} \mid \mathbf{a}_j) + 0$. Sada imamo $c_j = (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_j)$ pa su koeficijenti c_j jedinstveni, a onda je to i $\mathbf{y}$. Stavimo $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ i tvrdnja slijedi.

10.7. Neka je $\mathbf{x} = (4, -1, -3, 4)$ i L potprostor od $\mathbf{R}^4$ razapet vektorima $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0, 3)$. Odredi ortogonalnu projekciju $\mathbf{y}$ i ortogonalnu komponentu $\mathbf{z}$ vektora $\mathbf{x}$ s obzirom na prostor L.

RJEŠENJE. Neka je $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ jedinstveni prikaz od $\mathbf{x}$ tako da je $\mathbf{y} \in L$ i $\mathbf{z} \in L^\perp$. Prikažimo $\mathbf{y}$ kao linearnu kombinaciju $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

$$\mathbf{y} = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 + \gamma\mathbf{a}_3.$$

Vrijedi

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i) = (\mathbf{y} + \mathbf{z} \mid \mathbf{a}_i) = (\mathbf{y} \mid \mathbf{a}_i),$$

jer je $\mathbf{z} \in L^\perp$. Računamo skalarne produkte na lijevoj i desnoj strani jednakosti:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_1) = 4, \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_2) = -8, \quad (\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_3) = 16,$$

$$(\mathbf{y} \mid \mathbf{a}_i) = \alpha(\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_i) + \beta(\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_i) + \gamma(\mathbf{a}_3 \mid \mathbf{a}_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Izjednačavajući dobijemo sustav

$$\begin{cases} 4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4, \\ 4\alpha + 10\beta - 2\gamma = -8, \\ 4\alpha - 2\beta + 10\gamma = 16. \end{cases}$$

Ovaj sustav ima jednoparametarsko rješenje

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ovo je posljedica činjenice da je jedan vektor od $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ linearna kombinacija preostala dva. Da smo toga bili u početku svjesni, mogli smo jedan (bilo koji!) vektor izbaciti i nastaviti s jednostavnijim računom. U ovoj situaciji možemo za vrijednost parametra λ izabrati bilo koji broj. Uzmimo $\lambda = 0$. Tada je $\mathbf{y} = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 = (1, -1, -1, 5)$ i $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = (3, 0, -2, 1)$.

10.8. Udaljenost dvaju vektora vektorskog prostora V definira se kao norma njihove razlike, a udaljenost vektora $\mathbf{x}$ od nekog podskupa od V kao minimum svih udaljenosti između $\mathbf{x}$ i bilo kojeg vektora iz tog podskupa.

Neka su $\mathbf{y} \in L$ i $\mathbf{z} \in L^{\perp}$ ortogonalna projekcija i ortogonalna komponenta vektora $\mathbf{x} \in V$ s obzirom na potprostor L. Dokaži da je udaljenost $\mathbf{x}$ od L jednaka $\|\mathbf{z}\|$. Drugim riječima, $\mathbf{y}$ je najbolja aproksimacija od $\mathbf{x}$ u V.

RJEŠENJE. Uzmimo bilo koji $\mathbf{a} \in L$. Vrijedi

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2 = |(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (\mathbf{y}-\mathbf{a})|^2 = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{y}-\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{x}-\mathbf{y} \mid \mathbf{y}-\mathbf{a}).$$

Ali $(\mathbf{x}-\mathbf{y} \mid \mathbf{y}-\mathbf{a}) = 0$ zbog $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in L^{\perp}$ i $\mathbf{y}-\mathbf{a} \in L$ pa je

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{y}-\mathbf{a}|^2$$

odnosno, jasno je da vrijedi

$$(\mathbf{y} \neq \mathbf{a}) \implies |\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2 > |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 \implies |\mathbf{x}-\mathbf{a}| > |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Minimum se postiže za $\mathbf{a} = \mathbf{y}$.

10.2. Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije

Pretpostavimo da su $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n$ bilo koji linearno nezavisni vektori. Sustav $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ definiran na način

$$\mathbf{b}_1 := \mathbf{x}_1, \qquad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|};$$

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \mid \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|};$$

$$\mathbf{b}_3 := \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \mid \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{x}_3 \mid \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|};$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_k := \mathbf{x}_k - (\mathbf{x}_k \mid \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \ldots - (\mathbf{x}_k \mid \mathbf{e}_{k-1})\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|}.$$

je ortogonalan sustav takav da se za svaki j potprostor $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j)$ podudara s $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j)$. Ovaj algoritam naziva se **Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije**.

10.9. Gramm-Schmidtovim postupkom ortonormiraj skup u $\mathbf{R}^3$ koji se sastoji od vektora $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 3)$.

RJEŠENJE. Vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ su nezavisni (provjeri!) pa razapinju čitav prostor $\mathbf{R}^3$. Zbog toga će i $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ razapinjati čitav $\mathbf{R}^3$ i tvoriti ortonormiranu bazu za $\mathbf{R}^3$.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \mid \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 = (\tfrac{1}{2}, 2, -\tfrac{1}{2}) \sim (1, 4, -1),$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{(1,4,-1)}{3\sqrt{2}} = (\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \mid \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{a}_3 \mid \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{a}_3 - \tfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 - \tfrac{5\sqrt{2}}{6}\mathbf{e}_2 = (-\tfrac{16}{9}, \tfrac{8}{9}, \tfrac{16}{9}) \sim (-2, 1, 2),\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} = \frac{(-2,1,2)}{3} = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

10.10. Ortonormiraj kanonsku bazu $\{1, t, t^2, t^3\}$ od $\mathcal{P}_3$ ako je zadan skalarni produkt $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

RJEŠENJE.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} dt}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{b}_2 = t - (t \mid \tfrac{1}{\sqrt{2}})\tfrac{1}{\sqrt{2}} = t - (\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{\sqrt{2}} t dt)\tfrac{1}{\sqrt{2}} = t - 0 = t,$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}t,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= t^2 - (t^2 \mid \tfrac{1}{\sqrt{2}})\tfrac{1}{\sqrt{2}} - (t^2 \mid \sqrt{\tfrac{3}{2}}t)\sqrt{\tfrac{3}{2}}t \\ &= t^2 - \left(\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{\sqrt{2}} t^2 dt\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{3}{2}} t^3 dt\right)\sqrt{\tfrac{3}{2}}t = t^2 - \tfrac{1}{6} - 0 = t^2 - \tfrac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}} = \tfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(t^2 - \tfrac{1}{3}),$$

slično i $\mathbf{e}_4 = \tfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(t^3 - \tfrac{3}{5}t)$.

10.11. Nadopuni do ortonormirane baze u $\mathbb{R}^4$ skup $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

RJEŠENJE. Skalarni je umnožak ova dva vektora

$$(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\cdot(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})=0,$$

a njihova norma

$$|(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})|=|(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})|=\sqrt{4(\tfrac{1}{2})^2}=1$$

pa su ova dva vektora normirana i međusobno okomita. Označimo ih redom sa $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$. Skup $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ linearno je nezavisan. Nadopunimo ga s bilo koja dva vektora $\mathbf{a}_3$ i $\mathbf{a}_4$, ali tako da ostane linearno nezavisan. Uzmimo na primjer vektore $(1,0,0,0)$ i $(0,0,0,1)$.

Nastavljamo sa Gramm-Schmidtovim postupkom

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3-(\mathbf{a}_3\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{a}_3\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2=\mathbf{b}_3-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_2=(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,0),\\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|}=\frac{\mathbf{b}_3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\tfrac{\sqrt{2}}{2},-\tfrac{\sqrt{2}}{2},0,0),\\
\mathbf{b}_4 &= \mathbf{a}_4-(\mathbf{a}_4\,|\,\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1-(\mathbf{a}_4\,|\,\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2-(\mathbf{a}_4\,|\,\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3\\
&= \mathbf{a}_4-\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_1+\tfrac{1}{2}\mathbf{e}_2-0\mathbf{e}_3=(0,0,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\\
\mathbf{e}_4 &= \frac{\mathbf{b}_4}{|\mathbf{b}_4|}=\frac{\mathbf{b}_4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=(0,0,-\tfrac{\sqrt{2}}{2},\tfrac{\sqrt{2}}{2}).
\end{aligned}$$

Dimenzija prostora $\mathbb{R}^4$ je 4 pa ova četiri vektora čine bazu za $\mathbb{R}^4$.

Ako sa L označimo prostor razapet sa $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ onda je prostor razapet sa $\{\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4\}$ ortogonalni komplement od L koji se označavama sa $L^{\perp}$ (vidi sljedeći zadatak). Ovaj postupak ne dovodi do jedinstvenog rjesenja ($\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$), jer smo zadane vektore mogli nadopuniti do baze i nekim drugom vektorima. Ali ta druga rjesenja bi razapinjala isti potprostor kao i $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$, drugim riječima $L^{\perp}$ je jedinstven.

10.3. Dijagonalizacija simetrične matrice

Za matricu S kažemo da je **ortogonalna** ako su njeni stupci ortonormirani vektori.

Ako je S ortogonalna, tada vrijedi $S^{-1}=S^T$.

Za simetričnu matricu A vrijedi:

1) ona posjeduje točno n realnih svojstvenih vrijednosti (brojeći njihovu višestrukost);

2) postoji baza koju čine n međusobno okomitih svojstvenih vektora;

3) matrica S čiji su stupci normirani svojstveni vektori ortogonalna je matrica koja dijagonaslizira matricu A. Vrijedi

$$S^T AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

10.12. Nađi ortonormiranu bazu u kojoj je simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

dijagonalna (odnosno ortogonalnu matricu S tako da je $S^T AS$ dijagonalna).

RJEŠENJE.

$$k(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 10 = (\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

Za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ svojstvene vrijednosti su $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, za $\lambda_3 = 10$ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Svojstveni vektori v_1 i v_2 pripadaju istoj svojstvenoj vrijednosti i nisu okomiti. Uzmimo zato

$$v_2 = v_1 \times v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Još preostaje normirati sve vektore:

$$\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \hat{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \hat{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Od ovih vektora formiramo stupce matrice S

$$S = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Matica S je ortogonalna pa je $S^{-1} = S^T$. Vrijedi

$$S^T AS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

10.13. Dijagonaliziraj simetričnu u matricu $\mathbf{A}$ pomoću ortogonalne matrice S (tako da je $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna matrica) ako je $\mathbf{A}$:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

RJEŠENJE. a) $\mathbf{S} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{S} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ i $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

10.14. Neka je $A : V^2 \to V^2$ linearan operator zrcaljenja na pravcu $y = x$. Odredi mu matricu $\mathbf{A}$ u bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, nađi svojstvene vrijednosti i ortogonalnu matricu $\mathbf{S}$ takvu da je $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna matrica.

RJEŠENJE. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$ i $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{A}$ je simetrična pa stupce matrice $\mathbf{S}$ formiramo od jediničnih svojstvenih vektora $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

10.4. Zadaci za vježbu

10.15. Provjeri da su slijedeći vektori međusobno okomiti i nadopuni ih do ortogonalne baze

a) $(1, -2, 2, -3)$, $(2, -3, 2, 4)$;

b) $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 2, 3, -3)$.

10.16. Provjeri da su slijedeći vektori međusobno okomiti i normirani i nadopuni ih do ortonormirane baze

a) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$;

b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

10.17. Ortogonaliziraj sljedeće vektore
a) $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$;
b) $(1,1,-1,-2)$, $(5,8,-2,-3)$, $(3,9,3,8)$;
c) $(2,1,3,-1)$, $(7,4,3,-3)$, $(1,1,-6,0)$, $(5,7,7,8)$.

10.18. Ortonormiraj skup funkcija $\{1, \sin x, \sin^2 x\}$ ako je skalarni produkt $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

10.19. Dokaži da je skup funkcija $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots\}$ ortogonalan s obzirom na skalarni produkt $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

10.20. Nađi bazu za $L^{\perp}$ ako je L razapet vektorima $\mathbf{a}_1 = (1,0,2,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,2,3)$, $\mathbf{a}_3 = (0,1,-2,1)$.

10.21. Nađi ortogonalnu projekciju $\mathbf{y}$ i ortogonalnu komponentu $\mathbf{z}$ vektora $\mathbf{x}$ na potprostor L ako je
a) $\mathbf{x} = (5,2,-2,2)$ i L razapet vektorima $\mathbf{a}_1 = (2,1,1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,3,0)$, $\mathbf{a}_3 = (1,2,8,1)$;
b) $\mathbf{x} = (7,-4,-1,2)$ i L zadan linearnim sustavom

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

10.22. Neka je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza u V. Dokaži da vrijedi $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \forall \mathbf{x} \in V$.

10.23. Neka je V unitaran prostor, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormiran skup u V, $\mathbf{x} \in V$ i $\alpha_i = (\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_i)$. Dokaži da je tada $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) \geqslant |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_k|^2$.

11.

Kvadratne forme. Krivulje i plohe drugog reda

11.1. Dijagonalizacija kvadratne forme

Kvadratna forma pridružena simetričnoj matrici $\mathbf{A}$ je funkcija oblika

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x})$$

ili

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Forma je **kanonska** ako je odgovarajuća matrica dijagonalna. Kanonska forma ima oblik

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Svaka se kvadratna forma može svesti na kanonsku zamjenom $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$.

Lagrangeov postupak dijagonalizacije kvadratne forme.

- Ako je $a_{11} \neq 0$ (ili neki drugi dijagonalni element) uvodimo zamjenu

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n,$$

Time dobivamo formu

$$f(y_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + f_1(x_2, \dots, x_n)$$

u kojoj je prva nepoznanica izdvojena od ostalih. Postupak se nastavlja s kvadratnom formom f_1.

- Ako su pak u polaznoj formi (ili nakon neke od prethodnih transformacija) svi dijagonalni koeficijenti jednaki nuli, tada uvodimo pomoćnu zamjenu, kojom će se forma svesti na oblik u kojemu to nije slučaj. Ako je, recimo, $a_{12} \neq 0$, stavljamo

$$y_2 = -x_1 - a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

Time dobivamo kvadratnu formu u kojoj postoji član $2x_1^2$. Dalje nastavljamo kao u prvom slučaju.

11.1. Lagrangeovim postupkom dijagonaliziraj kvadratnu formu

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

RJEŠENJE. Uočimo prvu nepoznanicu čiji kvadrat se pojavljuje u kvadatnoj formi, to je x_1. Izlučimo $2x_1$ iz sume mješovitih članova koji sadrže x_1 kao faktor: $2x_1(-2x_2 + 2x_3)$. Uvodimo novu nepoznanicu y_1 kao sumu $4x_1$ (x_1 pomnožen koeficijentom uz x_1^2) i članova iz prethodne zagrade

$$y_1 = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3.$$

Ako izrazimo odatle x_1 i uvrstimo u kvadratnu formu dobije se oblik koji više ne sadrži mješovite članove sa x_1 (odnosno y_1):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2 - 3x_2x_3 \\ &= \frac{1}{4}y_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Dalje nastavljamo na isti način: sljedeća nepoznanica čiji kvadrat se tu pojavljuje je x_2 i uvodimo y_2:

$$y_2 = 2x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

pa je

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}(2x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{8}x_3^2 - 2x_3^2 \\ &= \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{15}{8}x_3^2. \end{aligned}$$

Na kraju još sa $y_3 = x_3$ imamo dijagonalni oblik polazne kvdratne forme:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{15}{8}y_3^2,$$

uz supstituciju

$$y_1 = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3, \quad y_2 = 2x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad y_3 = x_3.$$

11.2. Lagrangeovim postupkom dijagonaliziraj kvadratnu formu

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

RJEŠENJE. U ovoj formi su isključivo mješoviti članovi pa se postupak u prvom koraku razlikuje od prethodnog primjera. Izlučimo li $2x_1$ iz ove forme imamo $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1(x_2 + 2x_3) - 2x_2x_3$. Uvodimo novu nepoznanicu y_2 kao razliku članova iz prethodne zagrade i x_1,

$$y_2 = x_2 + 2x_3 - x_1.$$

Uvrštavajući odavde $x_2 = y_2 + x_1 - 2x_3$ dobivamo kvadratnu formu u kojoj sigurno postoji barem jedan kvadratni član i to $2x_1^2$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1y_2 - 2y_2x_3 + 4x_3^2 - 2x_1x_3.$$

Nastavljamo kao i prethodnom zadatku: izlučimo $2x_1$ iz sume mješovitih članova koji sadrže x_1 kao faktor. Tome izrazu pribrojimo $2x_1$ i imamo novu nepoznanicu

$$z_1 = 2x_1 + y_2 - x_3.$$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{2}(2x_1 + y_2 - x_3)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + y_2x_3 - 2y_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= \frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - y_2x_3 + \frac{7}{2}x_3^2. \end{aligned}$$

Napravimo isti korak za nepoznanicu y_2 :

$$z_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}x_3,$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}z_1^2 - 2(\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{7}{2}x_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 + 4x_3^2.$$

Konačno $z_3 = x_3$ i dijagonalni oblik je

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2,$$

uz supstituciju

$$\begin{aligned} z_1 &= 2x_1 + (x_2 + 2x_3 - x_1) - x_3 = x_1 + x_2 + x_3, \\ z_2 &= \frac{1}{2}(x_2 + 2x_3 - x_1) + \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3, \\ z_3 &= x_3. \end{aligned}$$

* * *

Uvijek možemo pronaći *ortogonalnu* matricu $\mathbf{S}$ takvu da je $\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S}$ dijagonalna. Takva matrica svodi kvadratnu formu na kanonski oblik, pri čemu je i novi sustav ortogonalan, a koeficijenti kvadratne forme su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Matricu $\mathbf{S}$ biramo tako da njeni stupci budu ortonormirani svojstveni vektori matrice $\mathbf{A}$. Tada vrijedi

$$\mathbf{S}^\top\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

i kvadratna forma će biti kanonska, po novim varijablama $y_1, \dots, y_n$:

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

11.3. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x_1,x_2,x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

RJEŠENJE. Matrica koja odgovara ovoj kvadratnoj formi je

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rješenja njene karakteristične jednadžbe $\begin{vmatrix} \lambda-6 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-5 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = 0$ su $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Pripadne svojstvene vektore $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ normiramo i od njih formiramo stupce ortogonalne matrice Q. Dakle,

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stavljajući $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, odnosno

$$x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3,$$
$$x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3,$$
$$x_3 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3$$

imamo kanonski oblik polazne kvadratne forme (koji možemo direktno napisati pomoću svojstvenih vrijednosti)

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Obratna veza novih i starih nepoznanica je $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, odnosno

$$y_1 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3,$$
$$y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3,$$
$$y_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

11.4. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

RJEŠENJE. Matrica ove kvadratne forme je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Korijeni karakterističnog polinoma $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$ su $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Pripadni svojstveni vektori su $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Treći svojstveni vektor mora biti okomit na v_1 i v_2 pa stavimo $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$. Nakon normiranja ovih vektora dobijemo ortogonalnu matricu

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Ako stavimo $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ (odnosno $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$) imamo kanonski oblik polazne kvadratne forme

$$f(x_1,x_2,x_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

11.5. Ispitaj definitnost sljedećih kvadratnih formi:

a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

b) $-x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

RJEŠENJE. a) Odgovarajuća matrica za ovu kvadratnu formu je $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$. Izračunajmo sve glavne minore ove matrice

$$D_1 = |2| > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{vmatrix} > 0.$$

Sve su strogo veće od nule pa je ova kvadratna forma pozitivno definitna.

b) Sada imamo matricu $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ za koju je $D_1 = |-1| < 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} > 0$ i $D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} < 0$. Vrijedi $(-1)^n D_n > 0$ za $n = 1, 2, 3$ pa je ova kvadratna forma negativno definitna.

c) Za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ je $D_1 = |1| > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 0$ i odmah zaključujemo ova kvadratna forma je indefinitna.

11.6. Odredi sve $\lambda \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$ je pozitivno definitna;

b) $-2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$ je negativno definitna.

RJEŠENJE. a) $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 > 0$ odakle slijedi $\lambda^2 < 0$, odnosno $-1 < \lambda < 1$. $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3\lambda^2 + 2\lambda^3 > 0$. Racionalni korijeni ove kubne jednadžbe moraju biti iz skupa $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$ (jer brojnik korijena mora biti djeljitelj slobodnog člana 1, a nazivnik djelitelj vodećeg 2). Provjerom dobijemo: 1 je nultočka kratnosti 2, a $-\frac{1}{2}$ kratnosti 1. Rješenje nejednadžbe $D_3 < 0$ je zato $\lambda > -\frac{1}{2}$. Konačno rješenje je $\lambda \in \langle -1, 1\rangle \cap \langle -\frac{1}{2}, \infty\rangle = \langle -\frac{1}{2}, \infty\rangle$.

b) $D_1 = -2 < 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & \lambda \\ \lambda & -8 \end{vmatrix} = 16 - \lambda^2 > 0$ pa slijedi $|\lambda| < 4$. Uvjet $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & \lambda & 2 \\ \lambda & -8 & -\lambda \\ 2 & -\lambda & -3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 < 0$ je ekvivalentan prethodnom i rješenje je $\lambda \in \langle -4, 4\rangle$.

11.2. Krivulje i plohe drugoga reda

Polinom drugog stupnja je funkcija oblika

$$p(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) + (\mathbf{b} \mid \mathbf{x}) + \gamma$$

Za matrice reda 2 koristimo zapis

$$p(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \gamma$$
$$= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + \gamma,$$

slično i za matrice trećeg reda.

Nul-točke ovih polinoma su, u nedegeneriranom slučaju, krivulje (plohe) drugoga reda. Vrstu krivulja određujemo dijagonalizacijom kvadratne forme. Pri tom uglavnom biramo postupak dijagonalizacije s pomoću ortogonalnih matrica, kako bi i novi sustav bio kartezijev (s okomitim osima).

11.7. Odredi krivulju zadanu jednadžbom

$$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0.$$

RJEŠENJE. Prva tri člana određuju kvadratnu formu sa matricom

$$\begin{bmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 45$ i $\lambda_2 = 5$, a odgovarajući normirani svojstveni vektori

$$\mathrm{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Od njih formiramo stupce matrice S:

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Uvodimo nove varijable na način $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{S}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, (obratna veza je $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathrm{S}^{\mathsf{T}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$).

Uvrštavajući

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y'),$$

jednadžba se svodi na

$$45x'^2 + 5y'^2 + \frac{90}{\sqrt{10}}x' - \frac{30}{\sqrt{10}} - 36 = 0$$

odnosno

$$45(x'^2 + \tfrac{2}{\sqrt{10}}x' + \tfrac{1}{10}) - \tfrac{45}{10} + 5(y'^2 - \tfrac{6}{\sqrt{10}}y' + \tfrac{9}{10}) - \tfrac{45}{10} - 36 = 0.$$

Uvodimo nove varijable translacijom sustava

$$x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{10}},$$

pa se jednadžba svodi na

$$45x''^2 + 5y''^2 = 45,$$

odnosno

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Ovom jednadžbom je zadana elipsa, koja je centralna u sustavu koji je od početnog dobiven rotacijom za kut φ takav da je $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$ i $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$, a potom translatiran (u zarotiranom sustavu) za vektor $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$.

11.8. Odredi krivulju zadanu jednadžbom $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

RJEŠENJE. Matrica kvadartne forme prva tri člana je $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{bmatrix}$. Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=8$, $\lambda_2=-2$ i odgovarajući normirani svojstveni vektori

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Sada je $\mathrm{S}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ i uvodimo nove varijable na način $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathrm{S}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$. Tako se jednadžba svodi na

$$8x'^2-2y'^2-\frac{16}{\sqrt{2}}x'-\frac{12}{\sqrt{2}}y'-13=0,$$

odnosno

$$8(x'^2-\frac{2}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{2})-4-2(y'^2+\frac{6}{\sqrt{2}}y'+\frac{9}{2})+9-13=0.$$

Uvodimo nove varijable translacijom sustava

$$x''=x'-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y''=y'+\frac{3}{\sqrt{2}}$$

pa imamo

$$8x''^2-2y''^2=8,$$

odnosno

$$\frac{x''^2}{1}-\frac{y''^2}{4}=1.$$

Ovo je jednadžba hiperbole koja je centralna u sustavu koji je najprije zarotiran od početnog za kut $\varphi=\frac{\pi}{4}$, a potom i translatiran za vektor $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{3}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

11.9. Odredi plohu zadanu jednadžbom $9x^2+20y^2+20z^2-40yz-36x-4\sqrt{2}y+4\sqrt{2}z+4=0$.

RJEŠENJE. Matrica ove kvadratne forme je

$$\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 20 & -20\\ 0 & -20 & 20\end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti $\lambda_1=9$, $\lambda_2=40$, $\lambda_3=0$ i odgovarajući svojstveni vektori

$$\mathrm{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathrm{v}_2=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \mathrm{v}_3=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

Zato imamo

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

i uz supstituciju

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

jednadžba se svodi na

$$9x'^2 + 40y'^2 - 36x' - 8y' + 4 = 0,$$
$$9(x'^2 - 4x' + 4) + 40(y'^2 - \tfrac{1}{5}y' + \tfrac{1}{100}) = 32.4$$

Stavimo li

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' - \tfrac{1}{10}$$

dobijemo jednadžbu cilindra

$$\frac{x''^2}{3.6} + \frac{y''^2}{0.81} = 1.$$

11.3. Zadaci za vježbu

11.10. Lagrangeovim postupkom dijagonaliziraj slijedeće kvadratne forme:

a) $f = -x_1^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

c) $f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

e) $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

f) $f = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2x_3$;

g) $f = x_1x_2 + x_2x_3$.

11.11. Svedi na kanonski oblik slijedeće kvadratne forme i odredi ortogonalnu matricu transformacije Q za koju je $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$:

a) $f = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

b) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

c) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

e) $f = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

f) $f = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

g) $f = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;

h) $f = 5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2-10x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+6x_2x_3+2x_2x_4-10x_3x_4$;

i) $f = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + 8x_1x_2 - 4x_3x_4$;

j) $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$;

k) $f = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

11.12. Ispitaj definitnost sljedećih kvadratnih formi:

a) $f = x_1^2 + 10x_1x_2 + 26x_2^2$;

b) $f = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$;

c) $f = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;

d) $f = -11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$;

e) $f = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$;

f) $f = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$;

g) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

11.13. Odredi $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje su slijedeće kvadratne forme pozitivno definitne:

a) $f = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

d) $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

e) $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

f) $f = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + (2\lambda - 1)x_1x_2 + \lambda^2 x_2x_3$;

g) $f = x_2^2 + x_3^2 + 4\lambda x_1x_2 + \lambda^2 x_1x_3$;

h) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$;

i) $f = x_1^2 + 5x_2^2 + (\lambda^2 + 1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

11.14. Odredi $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje su slijedeće kvadratne forme negativno definitne:

a) $f = -x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - \lambda^2 x_2x_3$;

b) $f = \lambda x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $f = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $f = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;

e) $f = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

11.15. Ispitaj definitnost kvadratnih formi u ovisnosti o parametru λ:

a) $f = \lambda x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$;

b) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

c) $f = -x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3$.

11.16. Odredi krivulje zadane jednadžbama:

a) $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$;

b) $5x^2 + 24xy - 5y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0$;

c) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$;

d) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

e) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

f) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

g) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$;

h) $2x^{+}4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;

i) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

11.17. Odredi plohe zadane jednadžbama:

a) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;
b) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;
c) $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16xz + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$;
d) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;
e) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2xz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$;
f) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;
g) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz + 2xz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;
h) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$;
i) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

Rješenja zadataka

§1

1.13. a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Simetrične su sve osim posljednje.

1.14. a) $\mathbf{0}$ (nul-matrica); b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (dijagonalna); c) $5\mathbf{I}$ (skalarna);

d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (simetrična).

1.15. a) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

1.16. a) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (gornja trokutasta); b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (simetrična).

1.17. a) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -17 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 22 & 5 \\ 6 & 3 & 12 & 2 \end{bmatrix}$; d) $[-1 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 27]^T$.

1.18. a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

1.19. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$; e) $\mathbf{0}$; f) $[13 \ \ 8]$.

1.21. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -15 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 6 & 22 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BD} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ -40 & 5 & -4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -10 \\ 1 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 20 \end{bmatrix}$, $\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 3 & -3 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$, $\mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 14 & -26 \\ 48 & 12 \end{bmatrix}$.

1.22. a) 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -7 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, 3) $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$;
b) 1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 3 & 12 & 5 \\ -1 & -5 & -3 \\ 5 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, 3) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 12 & -5 & 10 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

1.24. Vrijedi $A^2 = (xy^T)(xy^T) = x(y^Tx)y^T = \lambda xy^T = \lambda A$ gdje smo s λ označili skalar y^Tx.

1.25. a) Nije definiran; b) 3×3; c) 5×2; d) 5×1; e) nije definiran; f) nije definiran; g) nije definiran; h) nije definiran.

1.26. a) $A^2 + AB + BA + B^2$. ($AB + BA$ nije isto što i $2AB$.); b) $2A^2 + 4AB + BA + 2B^2$; c) $ACD + ACE + BCD + BCE$; d) $A^2 + 2A - 3I$; e) $A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$; f) $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

1.27. a) $f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 28 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$; b) $f(A) = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$; c) $f(A) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.28. a) $f(A) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$; b) $f(A) = 0$.

1.30. Direktnim uvrštavanjem.

1.31. a) $\begin{bmatrix} 144 & -55 \\ 55 & -21 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3842 & 1159 \\ 1159 & 365 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.32. a) $\begin{bmatrix} 512 & 512 \\ 512 & 512 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -29 & -42 \\ 63 & -50 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$;
f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} -23 & -67 \\ -3 & -31 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} -8 & -24 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$.

1.33. a) $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} a^4+6a^2+1 & 4a(1+a^2) \\ 4a(1+a^2) & a^4+6a^2+1 \end{bmatrix}$;
d) $\begin{bmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{bmatrix}$.

1.34. a) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 1+(n-1)\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & (2^n-1)\lambda \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ za parni n, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ za neparni n; e) $\begin{bmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & 1-2n \end{bmatrix}$.

1.35. Matematičkom indukcijom po broju n.

1.36. a) I; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & \dots & \binom{n+1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n-1}{2} \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

1.37. $\begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -922 \end{bmatrix}$.

1.38. a) $\begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{2}{3}a & -\frac{2}{3}b \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$.

1.40. a) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 4 & \frac{11}{2} \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

1.41. a) $\begin{bmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

1.42. a) Sve dijagonalne matrice; b) $\begin{bmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

1.43. Matrica $\lambda\mathbf{I}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

1.44. Očito je da dijagonalne matrice međusobno komutiraju.

Obrat ćemo pokazati pozivanjem na suprotno. Pretpostavimo da matrica $\mathbf{A}$ koja komutira sa svim dijagonalnim matricama ima bar jedan vandijagonalni element različit od nule npr a_{ij} za neke i, j, $i \neq j$. Tada ona specijalno komutira i sa matricom $\mathbf{D}$ koja na mjestu (i, i) ima jedinicu i na ostalim mjestima nule. Usporedimo matrice $\mathbf{DA}$ i $\mathbf{AD}$ na mjestu (i, j). Slijedi $a_{ij} = 0$ što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom za matricu $\mathbf{A}$. Zaključak je da je matrica $\mathbf{A}$ dijagonalna.

1.45. Jedan je smjer očit, $\lambda\mathbf{I}$ komutira sa svim matricama istoga reda.

Obrat. Pretpostavimo suprotno da matrica $\mathbf{A}$ ima bar jedan element $a_{ij} \neq 0$ za neke $i, j, i \neq j$. Uzmimo matricu $\mathbf{B}$ za koju je $b_{ii} = 1$ i $b_{jj} = -1$, a svi ostali elementi jednaki su nuli. Tada je

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = -a_{ij}, \qquad (\mathbf{BA})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = a_{ij}.$$

Zbog pretpostavke $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ slijedi $-a_{ij} = a_{ij}$ tj $2a_{ij} = 0$, kontradikcija! Dakle, svi elementi van dijagonale jednaki su nuli. Preostaje dokazati da su dijagonalni elementi međusobno jednaki. Uzmimo matricu $\mathbf{B}$ za koju je $b_{ij} = 1$ za neke fiksne $i \neq j$, a svi ostali elementi jednaki su nuli. Sada je

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ii}, \qquad (\mathbf{BA})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = a_{jj}.$$

Zaključujemo da mora biti $a_{ii} = a_{jj}$. Kako su indeksi i, j izabrani po volji, slijedi tvrdnja.

1.46. Matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ pri čemu vrijedi $bc = -a^2$.

1.47. Matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ pri čemu vrijedi $bc = -a^2$. (Ne postoji matrica drugoga reda takva da je $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$.)

1.48. Neka je k najmanji prirodan broj za koji vrijedi $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. Svaka kvadratna matrica zadovoljava relaciju $\mathbf{A}^2 = (a+d)\mathbf{A} - (ad-bc)\mathbf{I}$. Odavde slijedi $\mathbf{A}^k = (a+d)\mathbf{A}^{k-1} - (ad-bc)\mathbf{A}^{k-2}$ te zbog pretpostavke slijedi $(a+d)\mathbf{A}^{k-1} = (ad-bc)\mathbf{A}^{k-2}$. Množenjem ove jednakosti s $\mathbf{A}$ i korištenjem pretpostavke, dobivamo $\mathbf{0} = (ad-bc)\mathbf{A}^{k-1}$. Odavde slijedi tvrdnja.

1.49. Koristit ćemo rezultate zadataka 1.30 i 1.48. Vrijede jednakosti $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$ i $ad - bc = 0$ pa je stoga $A^2 = (a+d)A$. Ako je k najmanja potencija za koju vrijedi $A^k = 0$, tada vrijedi po gornjemu $A^k = 0 = (a+d)A^{k-1}$ te mora biti i $a + d = 0$. No, po prvoj relaciji tada slijedi i $A^2 = 0$.

1.50. A) Iz zadanoga uvjeta dobivamo sistem jednadžbi

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a^2 + bc = 1, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \\ cb + d^2 = 1. \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe mora biti $a + d = 0$ (b bilo kakav) ili $b = 0$. U prvom slučaju slijedi $a = -d$ i $a^2 + bc = 1$. U drugom mora biti $c = 0$ te $a^2 = d^2 = 1$ (uz $a \neq -d$). Odavde $a = d = 1$ ili $a = d = -1$.

Prema tome, rješenje čine matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, uz $a^2 + bc = 1$ te I i $-I$.

b) Trebamo pokazati oba smjera implikacije. 1) Ako je A involutorna, tj. $A^2 = I$, onda je $I - A^2 = 0$, $I - A + A - A^2 = 0$, dakle $(I - A)(I + A) = 0$. 2) Obratno, ako je $(I - A)(I + A) = 0$, množenjem slijedi $I - A + A - A^2 = 0$, tj. $I - A^2 = 0$ pa je A involutorna.

1.51. Dokazujemo matematičkom indukcijom po broju n. Za $n = 1$ matrica ima oblik $A = [0]$ i tvrdnja vrijedi uz $p = n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za matrice reda n. Izaberimo matricu B reda $n+1$, gornju trokutastu s nulama na glavnoj dijagonali. Nju možemo prikazati u obliku $B = \begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tu je matrica A istoga tipa, ali reda n, x vektor stupac dimenzije $n - 1$, 0 vektor redak dimenzije $n - 1$ sastavljen od nula. Za potencije matrice B vrijedi

$$B^p = \begin{bmatrix} A^p & A^{p-1}x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B^{p+1} = \begin{bmatrix} A^{p+1} & A^p x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $A^p = 0$, vidimo da je B nilpotentna. Primjeti da iz dokaza slijedi i ocjena $p \leqslant n$.

1.52. Neka su A i B gornje trokutaste matrice (za donje trokutaste dokaz je analogan). Tada vrijedi $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ za $i > j$. Izračunajmo matricu $C = AB$. Njen opći element je $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Pokažimo da je za $i > j$ on jednak nuli.

$$c_{ij} = \left(a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{ij}b_{jj}\right) + \left(a_{i\,j+1}b_{j+1\,j} + \ldots + a_{in}b_{nj}\right) = 0$$

U prvoj zagradi su elementi matrice A jednaki nuli ($a_{i1} = \ldots = a_{ij} = 0$) a u drugoj zagradi poništavaju se elementi matrice B ($b_{j+1\,j} = \ldots = b_{nj} = 0$). Zato je C gornja trokutasta.

1.53. Ako je A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times p$, tada je B^T tipa $p \times n$ i A^T tipa $n \times m$ pa je umnožak $B^T A^T$ definiran i tipa je $p \times m$, baš kao i matrica $(AB)^T$. Odredimo element na mjestu (i,j) u ove dvije matrice.

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki},$$

$$[B^T A^T]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B^T]_{ik}[A^T]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}.$$

Opći element se podudara pa su i matrice jednake.

1.54. $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

1.55. Očigledno je $A = A_s + A_a$. A_s je simetrična matrica jer vrijedi

$$(A_s)^T = (\frac{1}{2}(A + A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_s.$$

Slično, A_a je antisimetrična:

$$(A_a)^T = (\frac{1}{2}(A - A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -A_a.$$

Za matricu A ovaj rastav je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.56. Tvrdnja slijedi iz jednakosti $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

1.57. Vidi sljedeći zadatak.

1.58. Neka su A i B simetrične ($A = A^T$, $B = B^T$). Ako je AB simetrična, onda je $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$ pa A i B komutiraju. Obratno, ako je $AB = BA$, tada imamo $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ te je AB simetrična matrica.

1.59. Slično kao u predhodnom zadatku: $(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA$ pa vrijedi $(AB)^T = -(AB) \iff BA = -AB$.

1.61. a) $[AB] = 0 \iff AB - BA = 0 \iff AB = BA$, b) $[AB] = AB - BA = -(BA - AB) = -[BA]$, c) Vrijedi $[[AB]C] = [AB]C - C[AB] = (AB - BA)C - C(AB - BA) = ABC - BAC - CAB + CBA$. Slično je i $[[BC]A] = BCA - CBA - ABC + ACB$ i $[[CA]B] = CAB - ACB - BCA + BAC$. Zbrajajući sve tri jednakosti dobijemo traženu.

1.62. $$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2+i & -3i & 0 \\ 1-2i & 5 & 6+i \\ 2 & 3+i & 2i \end{bmatrix}, \qquad A^* = \begin{bmatrix} 2+i & 1-2i & 2 \\ -3i & 5 & 3+i \\ 0 & 6+i & 2i \end{bmatrix}.$$

1.63. Iz uvjeta $A = A^*$ slijedi $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$ te je a_{ii} realan. Slično za antihermitske. Rastav matrice na hermitsku i antihermitsku glasi

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^*) + \tfrac{1}{2}(A - A^*).$$

1.64. Uputa. Izaberi za matricu B matricu koja ima sve elemente jednake nuli osim jednog $b_{ij} = 1$, na poziciji $i \neq j$. Tada će slijediti nužno $a_{ii} = 1$, $a_{ji} = 0$. kako su indeksi i, j izabrani po volji, svi dijagonalni elementi matrice A moraju biti jednaki 1, a svi vandijagonalni 0.

1.65. Izračunajmo oba traga:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji},$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}.$$

Ove su dvije sume jednake — zamijenimo imena indeksima i, j. Druga i treća jednakost su trivijalne.

1.66. Pretpostavimo obratno: takve matrice postoje. Tada bi moralo vrijediti za njihove tragove $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} I = n$. Međutim, prema prošlom zadatku imamo $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$. Proturječje.

1.67. **a)** Vrijedi zbog komutativnosti zbrajanja matrica; **b)** Tvrdnja je očigledna; **c)** Vrijedi zbog $AI = IA = A$; **d)** $A * (B + C) = \frac{1}{2}(A(B + C) + (B + C)A) = \frac{1}{2}(AB + AC + BA + CA) = \frac{1}{2}(AB + BA) + \frac{1}{2}(AC + CA) = A * B - A * C$.

1.68. Uputa. Provjeri da vrijedi $(\alpha_1 I + \beta_1 J) + (\alpha_2 I + \beta_2 J) = (\alpha_1 + \alpha_2)I + (\beta_1 + \beta_2)J$ i $(\alpha_1 I + \beta_1 J) \cdot (\alpha_2 I + \beta_2 J) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)I + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J$.

§2

2.17. **a)** -96 (po 2. retku); **b)** 80 (po 1. stupcu); **c)** 75 (po 2.retku); **d)** 102 (po 2. stupcu).

2.18. **a)** $abcd$; **b)** $abcd$; **c)** $xyzuv$.

2.19. **a)** 1; **b)** -80; **c)** 9; **d)** 0; **e)** 1; **f)** -3.

2.20. **a)** -24; **b)** -200; **c)** 42. **2.21.** **a)** 320; **b)** 0; **c)** 319.

2.22. **a)** -140; **b)** 8; **c)** -13; **d)** -2. **2.23.** **a)** 115; **b)** -12; **c)** 8.

2.24. **a)** -8; **b)** -3; **c)** -160.

2.25. **a)** $x(x^2 - 2^2)$; **b)** $(x^2 - 1)(x^2 - 3^2)$; **c)** $x(x^2 - 2^2)(x^2 - 4^2)$.

2.26. **a)** -100; **b)** 1; **c)** 0; **d)** 900; **e)** 45.

2.27. $9\sqrt{10}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

2.28. **a)** $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; **b)** 0; **c)** $(ab + bc + ca)x + abc$; **d)** $1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$; **e)** 1.

2.29. **a)** $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$; **b)** 0; **c)** 0; **d)** 0.

2.30. **a)** $2abc(a + b + c)^3$; **b)** $4(b + c)(c - a)(a + b)$; **c)** $4(a - b)(a - c)(b - c)$; **d)** $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; **e)** $(ax + by + cz)^2$ **f)** $a^2 - b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 2d$.

2.31. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2.34. $D = (1 - a^4)^3$.

2.35. Koristimo Binet-Cauchyjev teorem:

$$1 = \det I = \det(AA^T) = \det A \det A^T = (\det A)^2.$$

Odavde slijedi $\det A = \pm 1$. Obrat ne vrijedi. Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ nije ortogonalna, a ima determinantu jednaku 1.

2.36. Zbog $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ po Binet-Cauchyjevoom teoremu je

$$1 = \det I = \det(UU^*) = \det U \overline{\det U} = |\det U|^2.$$

Odavde slijedi tvrdnja.

2.37. Izlučimo -1 iz svakog retka: $\det(A) = (-1)^n \det A$. Sada za antisimetričnu matricu neparnog reda vrijedi $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Slijedi $\det A = 0$.

2.38. Premještanjem posljednjeg stupca na mjesto prvog ima za rezultat množenje determinante sa $(-1)^{n-1}$. Slično, premještanje posljednjeg (u tako dobivenoj matrici) na mjesto drugog stupca odgovara množenju sa $(-1)^{n-2}$, itd. Konačno, početna determinanta se množi s $(-1)^{1+2+\ldots+n-1} = (-1)^{n(n-1)/2}$.

2.39. Neće se promijeniti. (Ova transformacija odgovara transponiranju, zamjeni stupaca i zamjeni redaka u suprotnom poretku.)

2.40. a) Ne; b) ne; c) da; d) da.

2.41. Indukcijom po broju blokova matrice A, (vidi sljedeći zadatak uz $C = 0$).

2.42. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po redu matrice D.

Baza: tvrdnja je očigledna za matricu reda 2.

Pretpostavka: neka tvrdnja vrijedi za svaku matricu reda $n-1$.

Korak: neka je $D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ kvadratna matrica reda n, dok su matrice A i B kvadratne reda k i $n-k$. Razvijamo determinantu od D po prvom retku ($\widetilde{D_{ij}}$ označava matricu D bez i-tog retka i j-tog stupca)

$$\det D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} d_{1i} \det \widetilde{D_{1i}} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{1+i} a_{1i} \det \widetilde{D_{1i}}.$$

Matrica $\widetilde{D_{1i}}$ je reda $n-1$ pa po pretpostavci indukcije za nju vrijedi $\det \widetilde{D_{1i}} = \det \widetilde{A_{1i}} \det B$ i zato je

$$\det D = \sum_{i=1}^{k} a_{1i} \det \widetilde{A_{1i}} \det B = \det A \cdot \det B.$$

2.43. a) Vrijedi jednakost blok-matrica

$$\begin{bmatrix} I & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D-BC \end{bmatrix}.$$

Računajući determinante matrica s obiju strana slijedi tvrdnja jer je $\det \begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det I \det I = 1$ po prethodnom zadatku.

b) Tvrdnja slijedi na isti način iz sljedeće jednakosti

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BC & B \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

c) Tvrdnju dobijemo iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -B \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & -AB+BA \\ CA^{-1} & -CB+DA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & -CB+DA \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B \\ -CA+AC & -CB+AD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & -CB+AD \end{bmatrix}.$$

2.44. $\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = (a(x)d(x) - b(x)c(x))' = a(x)'d(x) + a(x)d(x)' - b(x)'c(x) - b(x)c(x)' =$ $(a(x)'d(x) - b(x)'c(x)) + (a(x)d(x)' - b(x)c(x)') = \begin{vmatrix} a(x)' & b(x)' \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x)' & d(x)' \end{vmatrix}$. Za determinantu n-tog reda na lijevoj strani analogne formule imamo sumu od n determinanti tako da i-ta sadrži derivacije u i-tom retku.

2.45. a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{od svakog retka} \\ \textit{osim prvog} \\ \textit{oduzmemo prethodni} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & n \\ \vdots \\ n & n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{od svakog retka} \\ \textit{osim posljednjeg} \\ \textit{oduzmemo sljedeći} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n.$$

c) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-3 \\ \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{vmatrix} = (-2)^{n-1}\frac{n-1}{2}.$$

d) Svakom retku osim prvog oduzmemo prethodni. Zatim od svakom stupcu osim posljednjeg dodamo posljednji. Na taj način dobijemo gornju trokutastu matricu. Produkt elemenata na dijagonali je $\frac{n+1}{2}(-2)^{n-1}$.

2.46. a) D je polinom stupnja $n-1$ po nepoznanici x. Za $x \in \{2, 3, \dots, n\}$ determinanta je jednaka nuli, jer su joj tada dva retka proporcionalna. Također je vodeći koeficijent ovog polinoma jednak 1 (najveću potenciju x^{n-1} dobivamo množeći elemente na dijagonali). Zato je $D = (x-2)(x-3)\cdots(x-n)$.
b) Slično, D je polinom stupnja $n-1$ u x koji se poništava u $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Koeficijent uz najveću potenciju x^{n-1} je n pa je $D = n(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

2.47. D je polinom stupnja $n-1$ s vodećim koeficijentom $(-1)^{n-1}$ i s nultočkama $0, 1, 2, \dots, n-1$. Dakle, $D = (-1)^{n-1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

2.48. a) 1; b) 1; c) $(-1)^{n(n-1)/2}\lambda_1\cdots\lambda_n$; d) $(-1)^{n-1}$; e) $[1+(-1)^n]/2$. Vrijedi $\Delta_n = 1 - \Delta_{n-1}$.

2.49. a) $n!$; b) $(-2)^{n-1}(5n-2)$; c) $(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1)$; d) $(-3)^{n/2}$.

2.50. a) $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; b) $(-1)^{n-1}n!$; c) $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$; d) $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

2.51. a) $x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\dots(x_n-a_{n-1,n})$; b) $a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$; c) $x(a_1-x)\dots(a_n-x)(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x})$; d) $(a_1-x_1)(a_2-x_2)\dots(a_n-x_n)-a_1a_2\dots a_n$.

2.52. a) $3^{n+1}-2^{n+1}$; b) $n+1$; c) $\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}$; d) $\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$.

§ 3

3.13. a) 2; b) 1; c) 2; d) 2; e) 2; f) 3; g) 2; h) 5.

3.14. a) 2; b) 2; c) 3; d) 1; e) 2; f) 4; g) 2; h) 5.

3.15. a) $\lambda=-4$; b) $\lambda\neq-4$; c) ne postoji takav $\lambda\in\mathbf{R}$.

3.16. $\lambda\neq-\frac{1}{4}$.

3.17. a) Za $\lambda=3$ rang matrice je 2, a za $\lambda\neq3$ rang je 3. b) Za $\lambda=1$ rang je 1, za $\lambda\neq1$ rang je 2. c) Za $\lambda=3$ rang je 2, za $\lambda\neq3$ rang je 3.

3.19. a) $\begin{bmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{bmatrix}$; c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7&6&-1\\5&-3&-1\\-6&3&3\end{bmatrix}$;
d) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$; e) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

3.20. a) $\frac{1}{13}\begin{bmatrix}7&-8\\-1&3\end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{63}\begin{bmatrix}5&-1\\3&12\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{bmatrix}$;
d) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-3&1&9\\-5&-3&8\\-4&-1&5\end{bmatrix}$; e) $\frac{1}{48}\begin{bmatrix}-10&12&-10\\-17&6&7\\8&0&8\end{bmatrix}$; f) $-\frac{1}{29}\begin{bmatrix}3&-5&-35\\3&-5&-6\\-7&2&14\end{bmatrix}$.

3.21. a) $\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$;
d) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$; e) $\frac{1}{16}\begin{bmatrix}8&8&0&0&0\\4&-4&0&0&0\\0&0&6&-9&1\\0&0&6&-1&-7\\0&0&-2&3&5\end{bmatrix}$; f) $\frac{1}{64}\begin{bmatrix}16&-4&1&0&0\\0&16&-4&0&0\\0&0&16&0&0\\0&0&0&32&-16\\0&0&0&0&32\end{bmatrix}$.

3.22. a) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&2&2&2\\2&-5&2&2\\2&2&-5&2\\2&2&2&-5\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}0&-1&1&-1\\1&0&-1&1\\-1&1&0&-1\\1&-1&1&0\end{bmatrix}$.

3.23. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$; d) $\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{bmatrix}$.

3.24. a) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15 & -13 \\ 45 & 11 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

3.25. Matrica ima inverz ako i samo ako je njena determinanta različita od nule pa je $\mathbf{D}$ invertibilna ako i samo ako su svi d_i različiti od nule. Njen inverz je također dijagonalna matrica sa elementima $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}$ na dijagonali.

3.26. a) U inverznoj matrici se zamijene i-ti i j-ti stupac; b) i-ti stupac se podijeli sa λ; c) od j-tog stupca se oduzme i-ti podijeljen s λ.

3.27. Iz jednakosti $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ transponiranjem je $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$. $\mathbf{A}$ je simetrična pa je $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Množenjem zdesna s $\mathbf{A}^{-1}$ je $(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{A}^{-1}$ tj. i matrica $\mathbf{A}^{-1}$ je simetrična. Slično i za antisimetričnu.

3.28. Npr. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. Ako je $\mathbf{A}$ regularna postoji $\mathbf{A}^{-1}$. Pomnožimo jednakost $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ slijeva s $\mathbf{A}^{-1}$. Imamo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AC}$, tj. $\mathbf{IB} = \mathbf{IC}$. Slijedi $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Dakle, smijemo kratiti samo sa regularnim matricama!

3.29. Iz uvjeta je $\mathbf{I} = -\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}(-\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{A}$, dakle $\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

3.30. Pretpostavimo da je idempotentna matrica regularna. Znači da postoji $\mathbf{A}^{-1}$ pa pomnožimo s njom zdesna jednakost $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Dobije se $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} \implies \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Obrat je očigledan, jer je jedinična matrica i idempotentna i regularna.

3.31. Neka je matrica $\mathbf{B} = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}$ involutorna $\iff \mathbf{B}^2 = \mathbf{I} \iff (2\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{I} \iff 4\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{I} \iff 4\mathbf{A}^2 = 4\mathbf{A} \iff \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \iff \mathbf{A}$ je idempotentna.

3.32. Direktno provjerom

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{p-1}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{p-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A})$$
$$= \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{p-1} - \mathbf{A}^p = \mathbf{I} - \mathbf{A}^p = \mathbf{I}.$$

3.33. a) $\mathbf{AB}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, slično je i $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ pa slijedi $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. b) Lako se provjeri indukcijom po k. c) Kontraprimjer: uzmimo $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{B} = 2\mathbf{I}$. Vrijedi $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} = \frac{3}{2}\mathbf{I}$.

3.34. Iz jednakosti $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ invertiranjem je $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.

Množeći početnu jednakost zdesna i slijeva s B^{-1} je $B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} \Longrightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$.

Slično, množenjem zdesna i slijeva s A^{-1} dobije se $A^{-1}B = BA^{-1}$.

3.35. Uputa: dokaži prvo $(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS \ \forall m \in \mathbb{N}$.

3.36. a) Dokažimo prvo da vrijedi $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. To je istina zbog $A^\top(A^{-1})^\top = A^\top(A^\top)^\top = A^\top A = I$, slično je i $(A^{-1})^\top A = I$ pa je A^{-1} također ortogonalna. **b)** Neka su A i B ortogonalne. Tada je $(AB)(AB)^\top = ABB^\top A^\top = AIA^\top = I$. Također je i $(AB)^\top(AB) = I$ pa je AB ortogonalna. **c)** Lako, provjerom.

3.37. Slično kao u prethodnom zadatku je a) $U^{-1}(U^{-1})^* = U^*(U^*)^* = U^*U = I$ i analogno $(U^{-1})^*U^{-1} = I$. b) Vrijedi $U_1U_2(U_1U_2)^* = U_1U_2U_2^*U_1^* = U_1IU_1^* = I$, a također i $(U_1U_2)^*U_1U_2 = I$.

3.38. Svojstvo (1) je ekvivalentno sa $A = A^\top$, Svojstvo (2) je ekvivalentno sa $AA^\top = A^\top A = I$, tj. $A^{-1} = A^\top$, Svojstvo (3) je ekvivalentno sa $A^2 = I$, tj. $A^{-1} = A$. Lako se vidi da bilo koja dva od svojstava (1) $A = A^\top$, (2) $A^\top = A^{-1}$, (3) $A^{-1} = A$, povlače treće.

§ 4

4.14. **a)** $\alpha\begin{bmatrix}-11\\-7\\-8\\1\end{bmatrix}$; **b)** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; **c)** $\alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}17\\-5\\0\\2\\4\end{bmatrix}$; **d)** $\alpha\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$.

4.15. **a)** $\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$; **b)** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; **c)** $\alpha\begin{bmatrix}0\\3\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\4\\1\\0\end{bmatrix}$; **d)** $\alpha\begin{bmatrix}4\\-1\\0\\3\end{bmatrix}$; **e)** $\alpha\begin{bmatrix}-5\\-1\\0\\8\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}$; **f)** $\alpha\begin{bmatrix}1\\9\\7\end{bmatrix}$.

4.16. **a)** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; **b)** $\begin{bmatrix}\frac{3}{10}\\0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{10}\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}-1\\0\\-20\\-7\\5\end{bmatrix}$; **c)** sustav je nerješiv; **d)** $\begin{bmatrix}6\\-5\\3\\-1\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$; **e)** sustav je nerješiv.

4.17. **a)** $x_1 = x_3 = 1, x_2 = -2$; **b)** $\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ 10 \\ -44 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 9 \\ -40 \\ 1 \end{bmatrix}$; **c)** sustav je nerješiv ;

d) sustav je nerješiv ; **e)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.18. **a)** Za $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$ sustav nije rješiv. Za $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 1$ rješenje je jedinstveno: $x_1 = \frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}$, $x_2 = \frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}$, $x_3 = \frac{1}{4}(-4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda - 9)$; **b)** Za $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 1$ rješenje je $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{\lambda}$, $x_3 = \frac{3}{\lambda}$, $x_4 = 1 - \frac{5}{\lambda}$. Za $\lambda = 0$ sustav nije rješiv. Za $\lambda = 1$ rješenje je parametarsko $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; **c)** Za $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$ rješenje je trivijalno $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Za $\lambda = 1$ rješenje je $\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Za $\lambda = -2$ rješenje je $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.19. **a)** Za $\lambda \neq 0$ sustav nije rješiv. Za $\lambda = 0$ rješenje je $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$;

b) Sustav je rješiv $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Za $\lambda = 8$ rješenje je $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. Za $\lambda \neq 8$ rješenje je $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; **c)** Za $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$ sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$. Za $\lambda = 1$ rješenje je $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Za $\lambda = -2$ sustav nije rješiv; **d)** Za $\lambda(\lambda + 3) = 0$ sustav ima jedinstveno rješenje $x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+2)}$. Za $\lambda = 0$ i $\lambda = -3$ sustav nije rješiv.

4.20. Za $\lambda = -3$ sustav nije rješiv. Za $\lambda = 1$, rješenje ima tri slobodna parametra: $[1 - \alpha - \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma]^T$. Za ostale vrijednosti parametra λ rješenje je jedinstveno: $\left[\frac{1}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}, \frac{1}{3+\alpha}\right]^T$.

4.21. **a)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; **b)** $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$; **c)** $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$; **d)** $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$; **e)** $x = 3$, $y = 4$, $z = -2$; **f)** $x = 1$, $y = 2$, $z = -4$; **g)** sustav nema rješenja.

4.22. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$; b) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$; c) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$; d) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$; e) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 0$; f) sustav nema rješenja.

4.23. a) $P(x) = x^3 - 7x + 1$; b) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

4.24. $y = x^4 - 3x^3 - 5x + 5$.

4.25. Iz jednakosti

$$x = \left(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots\right)\ln(1 + x)$$

slijedi

$$\left(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots\right) = 1.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije, dobivamo sljedeće sustave jednadžbi koje moraju zadovoljavati brojevi c_n:

$$\begin{aligned}
c_1 \qquad\qquad\qquad\quad &= \tfrac{1}{2}\\
\tfrac{1}{2}c_1 - c_2 \qquad\qquad &= \tfrac{1}{3}\\
\tfrac{1}{3}c_1 - \tfrac{1}{2}c_2 + c_3 \qquad &= \tfrac{1}{4}\\
\tfrac{1}{4}c_1 - \tfrac{1}{3}c_2 + \tfrac{1}{2}c_3 - c_4 &= \tfrac{1}{5}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Determinanta ovoga sustava je $(-1)^{n-1}$. Iz prvih n jednadžbi Cramerovim pravilom dobivamo traženi izraz za c_n.

§ 5

5.27. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC}$.

5.28. Neka je E polovište od $\overline{AC}$, a F polovište od $\overline{BD}$. $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF}$. Slijedi $E = F$.

5.29. $\overrightarrow{OA}' = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA}' = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, a slično vrijedi za $\overrightarrow{OB}'$ i $\overrightarrow{OC}'$. Zbog $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ slijedi tvrdnja.

5.30.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC_2}\\
&= (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1})\\
&= 3\overrightarrow{OT_2} - 3\overrightarrow{OT_1} = 3\overrightarrow{OT_2} - 3\overrightarrow{OT_1}\\
&= 3\overrightarrow{T_1T_2}.
\end{aligned}$$

5.31. Uputa: dokaži $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ i $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH})$.

5.32. $4\overrightarrow{HK} = 4\overrightarrow{OK} - 4\overrightarrow{OH} = 2(\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}) - 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{QS}$.

5.33. $b - a$, $b - 2a$, $2b - 2a$, $2b - 3a$, $b - 2a$.

5.34. $a + b + c$, $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b - c$.

5.35. $\overrightarrow{AD} = b - a$, $\overrightarrow{AE} = a - b + c$, $\overrightarrow{CE} = a - 2b + c$.

5.36. $\frac{1}{3}(p + q)$, $-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q$, $(1 - \frac{2}{3}k)p + \frac{1}{3}kq$.

5.37. $\frac{2}{9}(a + b)$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{1}{2}(a + b)$.

5.38. $\frac{1}{7}a + \frac{4}{7}b$, $\frac{1}{5}a + \frac{4}{5}b$.

5.39. $\overrightarrow{OZ} = 6\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$.

5.40. $2a - b$, $a + b$, $b - a$, $\frac{1}{2}b$.

5.41. $2 : 1$.

5.42. $\overrightarrow{OR} = 3\overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP}$; $3 : 2$.

5.43. Vektor $\overrightarrow{AS}$ prikažemo na dva načina:

$$\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AP} = \alpha(a + \frac{1}{3}b) = \alpha a + \frac{\lambda}{3}b,$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{QB} = \tfrac{1}{3}(a + b) + \beta(-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} + a)\\ &= \tfrac{1}{3}(a + b) + \beta(-\tfrac{1}{3}(a + b) + a) = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\beta)a + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\beta)b.\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz vektore a i b (a i b su linearno nezavisni) dobijemo $\alpha = \frac{3}{5}$ i $\beta = \frac{2}{5}$. Slijedi $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}b$.

5.44. Točka G dužinu $\overline{AF}$ dijeli u omjeru $2 : 3$, a dužinu $\overline{DE}$ u omjeru $4 : 1$.

5.45.

$$\overrightarrow{KB} = -\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = a - \tfrac{1}{4}b,$$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = -\tfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{5}\overrightarrow{AC} = -\tfrac{1}{4}b + \tfrac{1}{5}(a + b) = \tfrac{1}{5}a - \tfrac{1}{20}b = \tfrac{1}{5}\overrightarrow{KB}.$$

5.46.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HG}.$$

Zato je $EFGH$ paralelogram.

5.47. Slično kao u prethodnom zadatku treba pokazati da su vektori nasuprotnih stranica jednaki (dovoljno je to provjeriti samo za jedan par stranica).

5.48.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{LS} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{LN})\\ &= \tfrac{1}{2}((\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}))\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN})\\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DE})\\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DE}) = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}.\end{aligned}$$

5.49. Prvo ćemo dokazati da su točke C_1, C_2 i C_3 kolinearne. Zbog $\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|}$ slijedi $\frac{|A_1A_2|}{|A_2A_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_2B_3|} = k$ pa je $\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{A_2A_3}$ i $\overrightarrow{B_1B_2} = k\overrightarrow{B_2B_3}$. Provjeri da vrijedi

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1B_2}.$$

Odakle slijedi

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{B_2B_3}) = k\overrightarrow{C_2C_3},$$

odnosno točke C_1, C_2, C_3 su kolinearne. Analogno se dokazuje kolinearnost točaka C_2, C_3, C_4; C_3, C_4, C_5; ..., C_{n-2}, C_{n-1}, C_n.

5.50. Neka su E, F, G i H redom polovišta bridova $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$, točka M polovište od $\overline{EH}$ i N polovište od $\overline{GF}$. Tada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OH}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}))\\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD});\\ \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}))\\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).\end{aligned}$$

5.51. Neka su D, E i F polovišta stranica AB, BC i CA trokuta ABC. Neka je točka T takva da je $\overrightarrow{TD} \perp \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{TE} \perp \overrightarrow{BC}$, tj. $\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ i $\overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Tada je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{TF}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TF} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= (\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{TE} + \overrightarrow{EF}) \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\\ &= 0 + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\end{aligned}$$

pa je $\overrightarrow{TF} \perp \overrightarrow{AC}$.

5.52. Neka je S presjek simetrala kuteva pri vrovima A i B. Označimo $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$. Vrijedi $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ pa je $\overrightarrow{AS} = \lambda(\widehat{\mathbf{b}} + \widehat{\mathbf{c}})$, $\overrightarrow{BS} = \mu(\widehat{\mathbf{a}} - \widehat{\mathbf{c}})$, gdje su $\widehat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ i $\widehat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$ jedinični vektori vektora $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$.

Iz $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \mathbf{0}$ slijedi $\mathbf{c} + \mu(\widehat{\mathbf{a}} - \widehat{\mathbf{c}}) - \lambda(\widehat{\mathbf{c}} + \widehat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$ odnosno

$$\mathbf{c} + \mu(\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} - \frac{1}{|\mathbf{c}|}\mathbf{c}) - \lambda(\frac{1}{|\mathbf{c}|}\mathbf{c} + \frac{1}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}) = 0.$$

Uvrstimo $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ pa je

$$(\frac{\mu}{|\mathbf{a}|} - \frac{\lambda}{|\mathbf{b}|})\mathbf{b} + (1 - \frac{\mu}{|\mathbf{a}|} - \frac{\mu}{|\mathbf{c}|} - \frac{\lambda}{|\mathbf{c}|})\mathbf{c} = 0.$$

Vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ nisu kolinearni pa koeficijenti uz njih u ovom zapisu moraju biti jednaki nuli. Iz sustava

$$\begin{cases} \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mu - \frac{1}{|\mathbf{b}|}\lambda = 0\\ (\frac{1}{|\mathbf{a}|} + \frac{1}{|\mathbf{c}|})\mu + \frac{1}{|\mathbf{c}|}\lambda = 1\end{cases}$$

dobijemo rješenje $\lambda = \frac{|b||c|}{|a|+|b|+|c|}$ i $\mu = \frac{|a||c|}{|a|+|b|+|c|}$. Analogno se dobije za S' presjek simetrala kuteva pri vrhovima B i C odgovarajuće koeficijente $\frac{|a||c|}{|a|+|b|+|c|}$ i $\frac{|a||b|}{|a|+|b|+|c|}$, odnosno $\overrightarrow{BS}' = \frac{|a||c|}{|a|+|b|+|c|}(\widehat{b} + \widehat{c}) = \overrightarrow{BS}$ pa je nužno $S = S'$ i sve tri simetrale kuteva se sijeku u jednoj točki.

5.53. Uputa: neka je točka T' presjek pravca kroz točke D i T i trokuta ABC. Prikaži vektor $\overrightarrow{OT}$ pomoću $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{OT}'$, a $\overrightarrow{OT}'$ pomoću $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ (kao u zadacima 5.1. i 5.3.).

5.54. $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

5.55. Uputa: uzmi točku T_a na spojnici težišta trokuta BCD i vrha A tako da je njena udaljenost od vrha A 3 puta veća nego od težišta trokuta BCD. Analogno točke T_b, T_c, T_d. Dokaži potom $T_a \equiv T_b \equiv T_c \equiv T_d$ što znači da se sve težišnice tetraedra sijeku u jednoj točki.

5.56. Naputak: dokaži $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ i $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{b}| - |\mathbf{a}|$. Jednakost vrijedi za $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, $\lambda > 0$.

5.57. $10 \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq 40$.

5.58. $2\sqrt{10 - 3\sqrt{3}}$.

5.59. $P = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{1}{4}|(\mathbf{d} - \mathbf{e}) \times (\mathbf{d} + \mathbf{e})| = \frac{1}{2}|\mathbf{n} \times \mathbf{m}| = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.60. Vrijedi $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. Skalarni produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ računamo iz $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$ odakle slijedi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 23$. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 13^2 - 2 \cdot 23 + 19^2 = 484$ pa je $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 22$.

5.61. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 20$.

5.62. Vrijedi $|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$ i odavde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. Slično iz $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b} + \mathbf{c}|^2$ i $|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{c}|^2$ je $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -4$ i $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = -12$. Zato je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot = -13$.

5.63. Neka je O središte kružnice. Vrijedi: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$, pa je (zbog $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

5.64. Iz $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ slijedi $\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$ ili $\mathbf{a} \perp (\mathbf{b} - \mathbf{c})$.

5.65. $\lambda = -\frac{3}{4}$.

5.66. $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

5.67. Stavimo $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Tada je

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2,$$

$$|AD|^2 + |BD|^2 = |\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}|^2 + |\frac{1}{2}\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2 + \frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2}|\mathbf{b}|^2.$$

5.68. 70.5°

5.69. $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$, $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{EC}|} = \frac{1}{6}$.

5.70. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -79$, $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = 79$.

5.71. a) $P = 3$, b) $P = 2$.

5.72. a) $\frac{4}{13}\mathbf{c}$;
b) $\frac{5}{7}(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$,;

c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})_c = (\mathbf{a}+\mathbf{b},\widehat{\mathbf{c}})\widehat{\mathbf{c}} = (\mathbf{a},\widehat{\mathbf{c}})\widehat{\mathbf{c}} + (\mathbf{b},\widehat{\mathbf{c}})\widehat{\mathbf{c}} = \mathbf{a}_c + \mathbf{b}_c$;
d) Npr. uzmimo vektore iz primjera b)

$$\mathbf{a}_b = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{23}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} = \frac{6}{5}(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}).$$

Lako se vidi da za ove vektore tvrdnja nije istinita.

5.73. Uputa: Duljine stranica su $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{AC}|$. Nakon toga kutove dobivamo iz kosinusovog poučka.

5.74. Mora biti $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2 = 0$, tj. moraju zadovoljavati uvjet $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

5.75. $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{1}{5}$.

5.76. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i}-2\mathbf{j}$ i $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{i}+2\mathbf{j}$.

5.77. a) $\mathbf{k}$ i $-\mathbf{k}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j}-\mathbf{k})$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{k}-\mathbf{j})$; c) $\mathbf{k}$ i $-\mathbf{k}$; d) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$ i $\frac{1}{\sqrt{14}}(-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

5.78. Provjeri da je $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

5.79. Mora biti $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$. Vrijedi da je $\overrightarrow{CA} = (2,-1,\lambda-3)$, $\overrightarrow{CB} = (1,-3,1)$. Onda je $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 2\cdot1+(-1)\cdot(-3)+1\cdot(\lambda-3) = 2+\lambda$. Iz uvjeta okomitosti je $2+\lambda = 0$, odnosno $\lambda = -2$.

5.80. $D(0,1,9)$.

5.81. a) $V = \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 14$; b) $V = 1$.

5.82. Vrijedi $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 0$.

5.83. a) $P = \sqrt{11}$; b) $P = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

5.84. $\mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{c}+\frac{1}{2}\mathbf{d}$, $\mathbf{b} = \frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{c}-\frac{1}{3}d$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+\mathbf{d}$, $\mathbf{d} = 2\mathbf{a}-3\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

5.85. $C(3,7)$, $D(0,5)$, $P = |\overrightarrow{AB}|^2 = 13$.

5.86. a) $[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}] > 0$, $[\mathbf{j},\mathbf{k},\mathbf{i}] > 0$, $[\mathbf{k},\mathbf{i},\mathbf{j}] > 0$; b) zbog $[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}] > 0$ i $[\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k}] < 0$; c) $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$ i $[\mathbf{a},\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}]$ imaju isti predznak.

5.87. $(\mathbf{ab})^2+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}))^2+(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}))^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

5.88. a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}] = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{c}\times\mathbf{b})] = 0+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})+0+0 = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$;
b) $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c})((\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})-(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c})(0-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = 0-2\mathbf{b}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+0+\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-0+0 = 2(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a} = 3[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$;
c) $((\mathbf{a}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))\times((\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = 0+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-0 = 2(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 2\mathbf{c}(\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))-2\mathbf{a}(\mathbf{c}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = 2[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\mathbf{c}$.

5.90. Površina trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2}|\overrightarrow{T_1T_2}\times\overrightarrow{T_1T_3}|$. Raspišimo ovu jednakost po koordinatama:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{k}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left(\begin{array}{l}\textit{3.stupac pomnožen s}\\ x_1 \textit{ dodamo prvom}\\ \textit{i pomnožen s } y_1\\ \textit{dodamo drugom}\end{array}\right) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

§ 6

6.37. a) $x-3y-7z-20=0$; b) $y+2z+5=0$.

6.38. $2x-3y-4z+20=0$.

6.39. a) $x+4y-3z=0$, b) $2x-y=0$.

6.40. $ABC\ldots 9x+y+2z-17=0$, $BCD\ldots 5x+y+2z-9=0$, $ACD\ldots x-y+1=0$ i $ABD\ldots 3x+y-5=0$.

6.41. $\alpha=-2$, $x+y+z-5=0$.

6.42. $2x-5y-4z-6=0$.

6.43. $2x+y-z-2=0$.

6.44. a) $x+y+z-6=0$, b) $4x+9y+36z-36=0$.

6.45. $\alpha(2x+y-3)+\beta(-y+z-1)=0$.

6.46. $d=\sqrt{3}$.

6.47. a) $d=2$; b) $d=\dfrac{2\sqrt{50}}{5}$.

6.48. $x+3y-2z+1+3\sqrt{14}=0$ i $x+3y-2z+1-3\sqrt{14}=0$.

6.49. $x-y-2z+3=0$.

6.50. a) $\varphi=90^\circ$, b) $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{33}}{33}$, $\varphi\approx 79^\circ 58'$, c) $\varphi=90^\circ$.

6.51. $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$, $\varphi\approx 62^\circ 18'$.

6.52. $\cos\varphi=\dfrac{2}{130}\sqrt{130}$, $\varphi\approx 79^\circ 53'$.

6.53. a) $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{-7}=\dfrac{z+1}{-11}$; b) $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$.

6.54. a) $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-1}$; b) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-5}$.

6.55. $\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{7}}$, $\varphi\approx 79^\circ 6'$.

6.56. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

6.57. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z+3}{2}$.

6.58. $\cos\varphi=\dfrac{3\sqrt{21}}{\sqrt{230}}$, $\varphi\approx 24^\circ 58'$.

6.59. $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.60. $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{105}}{21}$, $\varphi\approx 12^\circ 36'$.

6.61. $m=-3$

6.62. $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$.

6.63. $\dfrac{x-9}{2}=\dfrac{y+7}{-2}=\dfrac{z-4}{1}$.

6.64. $T(7,3,-4)$.

6.65. $q\equiv\dfrac{x+6}{13}=\dfrac{y+10}{3}=\dfrac{z+14}{-7}$.

6.66. $3x-2y+z+2=0$.

6.67. $(3,0,3)$ i $(-1,-2,1)$.

6.68. $\alpha=1$, $x+2y-7z+3=0$.

6.69. $19x+16y+18z-157=0$.

6.70. $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

6.71. $\alpha = 3,\ \beta = -3$.

6.72. $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-7}{1}$.

6.73. $x + y - z + 3 = 0$.

6.74. $T_1(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}),\ T_2(\frac{7}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{1}{9})$.

6.75. $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

6.76. $16x + 13y + z - 12 = 0$.

6.77. $(0, 1, 0)$ i $(0, -3, 0)$.

6.78. $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+7}{1} = \dfrac{z-8}{1}$.

6.79. $T(0, -7, 0)$.

6.80. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

6.81. $m = 8$.

6.82. $B = (9, 2, -13)$.

6.83. Npr. $C = (-1, -1, 1)$, $D = (1, 1, 0)$. Općenito: $C = (t-2, 2t-3, 3t-2)$, $D = (t, 2t-1, 3t-3)$.

6.84. $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{5}$.

6.85. $4(x-2) + (y+2) + 3(z-6) = 0 \equiv 4x + y + 3z - 24 = 0$.

6.86. $B(4, 9, 6)$.

6.87. $\dfrac{x - \frac{7}{2}}{5} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z - \frac{3}{2}}{5}$.

6.88. a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+4}{1}$, b) $\dfrac{x - \frac{19}{21}}{2} = \dfrac{y + \frac{55}{21}}{1} = \dfrac{z - \frac{88}{21}}{-1}$.

6.89. $P'(1, -5, -3)$.

6.90. $\pi \equiv 3x - y - z + 2 = 0,\ p \equiv \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-9}{2}$.

6.91. $\pi \equiv -5x + y + z = 0,\ A'(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{20}{9})$.

6.92. $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z-1}{2}$.

6.93. $x - y - z + 1 = 0,\ 8x + 14y + 19z + 13 = 0$.

6.94. $\dfrac{x-3}{6} = \dfrac{y+5}{-18} = \dfrac{z-4}{9}$.

6.95. $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z+1}{9}$.

6.96. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

6.97. $T(-1, \frac{13}{4}, 0)$.

6.98. $(-8, -\frac{11}{2}, -\frac{9}{4})$.

6.99. $P = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

6.100. $T(-\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$.

6.101. $T(3, 1, 3)$.

6.102. $x - y + z - 3 = 0$ i $7x - 5y + z - 13 = 0$.

6.103. $x - z - 4 = 0$ i $-x + y + 1 = 0$.

6.104. $5x + 31y + 4z + 10\sqrt{1002} + 138 = 0,\ 5x + 31y + 4z - 10\sqrt{1002} + 138 = 0$.

6.105. $d = \frac{1}{3}\sqrt{291}$.

6.106. $d = \sqrt{62}$.

6.107. $(1,2,3)$.

6.108. $A(4,-10,2)$.

6.109. $d = 25$.

6.110. Neka je R bilo koja točka te ravnine. Tada vektori $\overrightarrow{RT}$, c_1 i c_2 moraju biti komplanarni, tj. njihov mješoviti produkt mora biti jednak nuli.

6.111. Za bilo koju točku R te ravnine vektori $\overrightarrow{RT_1}$, $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ moraju biti komplanarni, pa je njihov mješoviti produkt jednak nuli.

6.112. Za svake dvije točke $T_1 \in p_1$ i $T_2 \in p_2$, vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$, $c_1 = (l_1, m_1, n_1)$ i $c_2 = (l_2, m_2, n_2)$ moraju biti komplanarni.

6.113. $d(T,p) = |\overrightarrow{ST}| \cdot \sin\sphericalangle(\overrightarrow{ST}, c) = \frac{|c \times \overrightarrow{ST}|}{|c|}$.

6.114. Neka je $d(p_1,p_2) = d(A_1,A_2)$, $A_1 \in p_1$, $A_2 \in p_2$. Tada je $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1T_1} + \overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{T_2A_2}$ i $\overrightarrow{A_1T_1} = \alpha c_1$, $\overrightarrow{T_2A_2} = \beta c_2$, $\overrightarrow{A_1A_2} = \gamma(c_1 \times c_2)$. Množeći $\overrightarrow{A_1A_2}$ skalarno sa vektorom $c_1 \times c_2$ imamo $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (c_1 \times c_2) = \overrightarrow{A_1T_1} \cdot (c_1 \times c_2) + \overrightarrow{T_1T_2} \cdot (c_1 \times c_2) + \overrightarrow{T_2A_2} \cdot (c_1 \times c_2)$ i zbog gore navedenog je $|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (c_1 \times c_2)| = |\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |c_1 \times c_2|$, $\overrightarrow{A_1T_1} \cdot (c_1 \times c_2) = 0$ i $\overrightarrow{T_2A_2} \cdot (c_1 \times c_2) = 0$. Dakle, $d(p_1,p_2) = |\overrightarrow{A_1A_2}| = \frac{|\overrightarrow{T_1T_2} \cdot (c_1 \times c_2)|}{|c_1 \times c_2|}$.

§ 7

7.11. Ne, jer nisu linearno nezavisni.

7.12. U novoj bazi $\mathbf{x}$ ima koordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7.13. U novoj bazi $\mathbf{x}$ ima koordinate $(0,2,1,2)$.

7.14. Jedna moguća baza je $\{(1,0,0,2),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ i $\dim V = 3$.

7.15. **a)** Da, **b)** ne.

7.16. **a)** Da, **b)** ne, **c)** da, **d)** ne, **e)** ne.

7.17. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

7.18. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} & -\frac{17}{2} & 4 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

7.19. U oba slučaja su linearno nezavisne i njihov broj jednak je dimenziji prostora antisimetričnih matrica reda 3. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{bmatrix}$.

7.20. Oba skupa su linearno nezavisna i kardinalnog broja jednakog dimenziji od $\mathscr{P}_3$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

7.21. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -c & c^2 & -c^3 & \dots & (-1)^n c^n \\ 0 & 1 & -2c & 3c^2 & \dots & (-1)^{n-1} n c^{n-1} \\ & \vdots & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$,
u $(k+1)$-vom stupcu su $(-c)^k$, $\binom{k}{k-1}(-c)^{k-1}$, $\binom{k}{k-2}(-c)^{k-2}, \dots, \binom{k}{1}(-c)$.

7.22. Dimenzija za potprostor gornjih trokutastih matrica je $\frac{n(n+1)}{2}$, a u bazi su matrice $\mathbf{E}_{ij}$ iz kanonske baze za $\mathcal{M}_n$ ali samo one za koje je $i \leqslant j$.

Slično, za potprostor donjih trokutastih koji je iste dimenzije kao prethodni bazu čine matrice $\mathbf{E}_{ij}$ za sve i, j takve da je $i \geqslant j$.

Dimenzija za potprostor simetričnih matrica je $\frac{n(n+1)}{2}$, a bazu čine matrice $\mathbf{F}_{ij}$ za $i \leqslant j$, sa svim nulama osim jedinicom na mjestima (i, j) i (j, i).

Za antisimetrične dimenzija je $\frac{n(n-1)}{2}$, a bazu čine matrice $\mathbf{G}_{ij}$ za $i < j$, sa svim nulama osim 1 na mjestu (i, j) te -1 na mjestu (j, i).

7.23. a) Dimenzija je 3, bazu čine npr. a_1, a_2, a_4;
b) Dimenzija je 3, bazu čine npr. a_1, a_2, a_5.

7.24. Nadopunimo bilo koju bazu $B_{L\cap M}$ od $L \cap M$ do baze B_L od L, a zatim i do baze B_M od M. Onda jasno vrijedi

$$B_{L+M} = (B_L \cup B_M) - B_{L\cap M},$$

odakle slijedi tvrdnja.

7.25. Iz skupa $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_l\}$ izbacimo vektore koji su linearno zavisni sa vektorima ispred njih. Bez smanjena općenitosti (eventualnom prenumeracijom b-ova) neka su ostali $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_s\}$ koji tvore bazu za $L + M$, dok su $\mathbf{b}_{s+1}, \dots, \mathbf{b}_l$ izbačeni.

Vrijedi $\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(L\cap M)$ odakle je $m+s = l+m-\dim(L\cap M)$, odnosno $\dim(L \cap M) = l - s$. Prikažimo izbačene vektore preko baze za $L + M$.

$$\mathbf{b}_j = \alpha_{j1}\mathbf{a}_1 + \alpha_{j2}\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_{jk}\mathbf{a}_k + \beta_{j1}\mathbf{b}_1 + \dots + \beta_{js}\mathbf{b}_s, \quad j = s+1, \dots l.$$

Označimo $\mathbf{e}_j = \alpha_{j1}\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{jk}\mathbf{a}_k$ i $\mathbf{f}_j = \beta_{j1}\mathbf{b}_1 + \dots + \beta_{js}\mathbf{b}_s$ $\forall j$. Jasno je $\mathbf{e}_j \in M$ i $\mathbf{f}_j \in L$, $\mathbf{e}_j = \mathbf{b}_j - \mathbf{f}_j \in L$. Sada je $\mathbf{e}_j \in L \cap M$ $\forall j = s+1, \dots, l$. Ima ih točno $l - s = \dim(L \cap M)$ pa ako pokažemo da su linearno nezavisni čine bazu za $L \cap M$.

$$\lambda_{s+1}\mathbf{e}_{s+1} + \dots + \lambda_l \mathbf{e}_l = 0,$$
$$\lambda_{s+1}(\mathbf{b}_{s+1} - \mathbf{f}_{s+1}) + \dots + \lambda_l(\mathbf{b}_l - \mathbf{f}_l) = 0,$$
$$(-\lambda_{s+1}\mathbf{f}_{s+1} - \dots - \lambda_l \mathbf{f}_l) + \lambda_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} + \dots + \lambda_l \mathbf{b}_l = 0.$$

Dio u zagradi je linearna kombinacija vektora $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_s$ pa posljednju jednakost možemo napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i \mathbf{b}_i + \lambda_{s+1}\mathbf{b}_{s+1} + \dots + \lambda_l \mathbf{b}_l = 0,$$

a vektori baze su linearno nezavisni, slijedi $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_l = 0$. Dakle, $\{\mathbf{e}_{s+1}, \dots, \mathbf{e}_l\}$ čine bazu za $M \cap L$.

7.26. Označimo vektore baza redom sa $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Prema prethodnom zadatku prvo se pokaže da je skup $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1\}$ linearno nezavisan. (Dalje ne treba provjeravati jer je

$\dim \mathbf{R}^4 = 4$.) Slijedi $\dim(L \cap M) = 2$. Rastavimo $\mathbf{b}_2$ i $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbf{b}_2 = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 + 1\mathbf{b}_1,$$
$$\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 + 1\mathbf{b}_1.$$

Uzimamo samo

$$\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3,$$
$$\mathbf{e}_2 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3,$$

pa je baza za $L \cap M$ $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\}$.

7.27. Dimenzija sume je 3 i baza npr. $\{1 + 2t + t^3, 1 + t^2, 1 + t + t^2\}$; dimenzija presjeka je 1, baza $\{2 + 3t + t^2 + t^3\}$.

7.28. Neka su $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Tada je zbog $a_1 = \overline{a_2}$ i $b_1 = \overline{b_2}$ ispunjeno

$$\alpha a_1 + \beta b_1 = \alpha\overline{a_2} + \beta\overline{b_2} = \overline{\alpha a_2 + \beta b_2}$$

pa je V potprostor od $\mathbf{C}^3$. $\mathbf{C}$ shvaćen kao realni vektorski prostor možemo poistovjetiti sa $\mathbf{R}^2$.

Tražimo bazu: neka je $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V$. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ pa je

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = (x_1, x_2, x_1, -x_2, z_1, z_2)$$
$$= x_1(1, 0, 1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, -1, 0, 0) + z_1(0, 0, 0, 0, 1, 0) + z_2(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Baza je $\{(1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$ i $\dim V = 4$ (dimenzija realnog vektorskog prostora $\mathbf{C}^3$ je 6).

§8

8.16. **a)** Ne, **b)** ne, **c)** da, **d)** ne, **e)** ne, **f)** ne, **g)** da.

8.17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

8.18. a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{bmatrix}$.

8.19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

8.20. $\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ za $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

8.21. Po prethodnom zadatku je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

slijedi rang operatora je $r(A) = 2$ i defekt $d = \dim V^3 - r = 3 - 2 = 1$.

8.22. f je kompozicija operatora $g(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ i $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{b}$, $f = h \circ g$. Zbog toga je njegova matrica produkt matrica operatora h i g:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_yb_y+a_zb_z & -b_ya_x & -b_za_x \\ -b_xa_y & a_xb_x+a_zb_z & -b_za_y \\ -b_xa_z & -b_ya_z & a_xb_x+a_yb_y \end{bmatrix}.$$

8.23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

8.24. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

8.25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

8.26. a) $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; d) $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

8.27. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

8.28. $A(\mathbf{i}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$, $A(\mathbf{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Zato je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. A je involutoran jer je

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.29. a) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

8.30. a) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

8.31. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

8.32. Injektivan je onda i samo onda kada je $d(A) = 0$. $d(A) = \dim \mathbf{R}^2 - r(A) = 2 - 2 = 0$ odakle slijedi injektivnost. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8.33. Injektivan je zbog $d(A) = \dim \mathbf{R}^3 - r(A) = 3 - 3 = 0$. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8.34. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $d = \dim \mathscr{P}_3 - r = 4 - 3 = 1$;

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $d = \dim \mathscr{P}_2 - r = 3 - 3 = 0$;

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $r = 3$, $d = \dim \mathscr{P}_2 - r = 3 - 3 = 0$;

$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $r = 1$, $d = \dim \mathscr{P}_3 - r = 4 - 1 = 3$.

8.35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(A) = 4$, $d(A) = 0$.

8.36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$, $d(A) = 4 - 1 = 3$.

8.37. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}$.

8.38. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

8.39. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$.

8.40. U zad. 8.2. $r(A) = 1$, $d(A) = 2$. U zad. 8.4. $r(A) = 2$, $d(A) = 2$. U zad. 8.6. rang zrcaljenja je 3, rang ortogonalnih projiciranja na ravnine je 2, rang ortogonalnih projiciranja na pravce 1. U svim slučajevima je $d(A) = 3 - r(A)$.

8.41. $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. $\dim(\mathrm{Ker} f) = 2$ i baza za jezgru je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$;
$\dim(\mathrm{Im} f) = 2$ i baza za sliku je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

8.42. a) $\lambda^2 - 4\lambda + 4$; b) $\lambda^2 - 5\lambda + 6$; c) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$; d) $\lambda^2 - 4\lambda + 4$; e) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda$.

8.43. Po teoremu o rangu i defektu je $\dim X = d(A) + r(A)$. Pokažimo da $(ii) \implies (i)$ i $(iii) \implies (i)$ (obrat je trivijalan).

Ako je A injekcija onda je $d(A) = 0$ pa imamo $\dim Y = \dim X = d(A) + r(A) = r(A)$

odakle slijedi da je A i surjekcija, odnosno bijekcija.

Slično, ako je A surjekcija vrijedi $\dim Y = r(A)$ pa je $d(A) = \dim X - r(A) = \dim Y - r(A) = 0$. Zato je A i injekcija, odnosno bijekcija.

8.44. Neka je

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}.$$

Operator je zadan ako je poznato njegovo djelovanje na bazi. Ako vrijedi tvrdnja zadatka (za $\mathbf{x}$ uvrstimo redom $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) tada mora biti

$$A(\mathbf{i}) = a_x\mathbf{i} + \mathbf{b}_x\mathbf{j} + c_x\mathbf{k}, \quad A(\mathbf{j}) = a_y\mathbf{i} + \mathbf{b}_y\mathbf{j} + c_y\mathbf{k}, \quad A(\mathbf{k}) = a_z\mathbf{i} + \mathbf{b}_z\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}.$$

To znači da je matrica operatora A jednaka

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$$

Odavde se vidi da je vektor $\mathbf{a}$ prvi redak, $\mathbf{b}$ drugi redak, a $\mathbf{c}$ treći redak matrice operatora u bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

8.45. Vrijedi

$$A(\alpha z_1 + \beta z_2) = \overline{\alpha z_1 + \beta z_2} = \overline{\alpha}\,\overline{z_1} + \overline{\beta}\,\overline{z_2} = \overline{\alpha}A(z_1) + \overline{\beta}A(z_2)$$

Dakle, A nije linearan operator nad $\mathbf{C}$ jer je općenito $\alpha \neq \overline{\alpha}$ i $\beta \neq \overline{\beta}$. Uoči da A jest linearan operator nad $\mathbf{R}$, jer je $\alpha = \overline{\alpha}$ i $\beta = \overline{\beta}$ za $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

8.46. Prvo tvrdimo da postoji $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ takav da su $\mathbf{e}$ i $A\mathbf{e}$ linearno nezavisni. U suprotnom je $A(\mathbf{x}) = \lambda_x\mathbf{x}$, $\forall\mathbf{x}$. Neka je $A(\mathbf{x}) = \lambda_x\mathbf{x}$ i $A(\mathbf{y}) = \lambda_y\mathbf{y}$. Tada imamo $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda_{x+y}(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. S druge strane je $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) = \lambda_x\mathbf{x} + \lambda_y\mathbf{y}$. Ako odaberemo linearno nezavisne $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ iz $\lambda_{x+y}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda_x\mathbf{x} + \lambda_y\mathbf{y}$ slijedi $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$, odnosno $A = \lambda I$ što je u kontradikciji sa $\mathrm{tr}A = 0$.

Dakle, postoji $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^n$ takav da su $\mathbf{e}$ i $A(\mathbf{e})$ linearno nezavisni pa skup $\{\mathbf{e}, A\mathbf{e}\}$ nadopunimo do baze za $\mathbf{R}^n$. U toj bazi je matrica operatora

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Tvrdnju dobijemo indukcijom po n.

Baza: za $n = 1$ zbog $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = 0$ je $\mathrm{A} = [0]$ pa je tvrdnja očigledna.

Pretpostavka: neka tvrdnja vrijedi za $n - 1$.

Korak: Po $(*)$ je $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X} & \mathrm{B} \end{bmatrix}$, gdje su Y, X, B redom blokovi tipa $1 \times (n-1)$, $(n-1) \times 1$, i $(n-1) \times (n-1)$. Ako je $\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = 0$ onda je i $\mathrm{tr}\,\mathrm{B} = 0$ pa po pretpostavci indukcije postoji regularna matrica prijelaza S tako da je $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{BS}$ sa nulama na dijagonali. Pokažimo da je $\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{S} \end{bmatrix}$ (blok-matrica istih dimenzija kao i A) matrica prijelaza za A.

Vrijedi $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix}$. Računamo $T^{-1}AT$:

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y \\ X & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & Y \\ S^{-1}X & S^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & YS \\ S^{-1}X & S^{-1}BS \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a $S^{-1}BS$ je matrica sa nulama na dijagonali pa je takva i $T^{-1}AT$.

§9

9.11. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $v_1 = [1,\ 1]^T$;
b) $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$; $v_1 = [1,\ \sqrt{2}]^T$, $v_2 = [1,\ -\sqrt{2}]^T$;
c) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$; $v_1 = [1,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ -4]^T$;
d) $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 4$; $v_1 = [8,\ -1]^T$, $v_2 = [0,\ 1]^T$;
e) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; $v_1 = [0,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ 1]^T$;
f) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; $v_1 = [2,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ -1]^T$;
g) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$; $v_1 = [2,\ 1]^T$, $v_2 = [-1,\ 2]^T$;
h) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$; $v_1 = [1,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ -1]^T$;

9.12. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$; $v_1 = [1,\ 0,\ 0]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 1]^T$, $v_3 = [0,\ -1,\ 1]^T$.
b) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; $v_1 = [0,\ 1,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ 1,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ 0,\ 1]^T$.
c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$; $v_1 = [1,\ 1,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ 0,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ -3,\ -5]^T$.
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -5$; $v_1 = [2,\ 1,\ 0]^T$, $v_2 = [1,\ 0,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ 3,\ 2]^T$.
e) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$; $v_1 = [1,\ 0,\ -1]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 0]^T$, $v_3 = [3,\ 4,\ 3]^T$.
f) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$; $v_1 = [1,\ 0,\ 1]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ -2]^T$, $v_3 = [3,\ -2,\ 1]^T$.
g) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $v_1 = [1,\ 1,\ 1]^T$, $v_2 = [1,\ 0,\ -3]^T$, $v_3 = [0,\ 1,\ 3]^T$.
h) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$; $v_1 = [1,\ 0,\ 0]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 0]^T$.
i) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $v_1 = [1,\ 0,\ 1]^T$.

9.13. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$; $v_1 = [1,\ 0,\ 0,\ 1]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 1,\ 0]^T$, $v_3 = [0,\ -1,\ 1,\ 0]^T$, $v_4 = [-1,\ 0,\ 0,\ 1]^T$.
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$; $v_1 = [1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$, $v_2 = [0,\ 0,\ 1,\ 1]^T$, $v_3 = [-1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$, $v_4 = [0,\ 0,\ -1,\ 1]^T$.
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 4$; $v_1 = [1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 1,\ 0]^T$, $v_3 = [0,\ 0,\ 1,\ 1]^T$, $v_4 = [1,\ -1,\ 1,\ -1]^T$.
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 2$: $v_1 = [1,\ 0,\ 0,\ 1]^T$, $v_2 = [0,\ 1,\ 1,\ 0]^T$, $v_4 = [1,\ -1,\ 1,\ -1]^T$.
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$; $v_1 = [1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ 1,\ 0,\ 0]^T$.
f) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; $v_1 = [0,\ 0,\ 0,\ 1]^T$, $v_3 = [0,\ 1,\ 0,\ 0]^T$, $v_4 = [1,\ 0,\ 1,\ 0]^T$.

9.14. a) $v_1 = [1,\ 1,\ -1]^T$, $v_2 = [2,\ 1,\ 0]^T$, $v_3 = [3,\ 0,\ 2]^T$; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(-1,0,0)$.
b) $v_1 = [2,\ 1,\ -3]^T$, $v_2 = [-1,\ 2,\ 0]^T$, $v_3 = [6,\ 3,\ 5]^T$; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(14,0,0)$.
c) $v_1 = [1,\ -1,\ 0]^T$, $v_2 = [1,\ 0,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ 2,\ 4]^T$; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(3,3,2)$.
d) $v_1 = [-2,\ 1,\ 2]^T$, $v_2 = [-8,\ 3,\ 7]^T$, $v_3 = [-3,\ 1,\ 3]^T$; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(1,2,3)$.
e) $v_1 = [1,\ 3,\ 0]^T$, $v_2 = [0,\ -3,\ 1]^T$, $v_3 = [1,\ -2,\ 2]^T$; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(1,1,-2)$.
f) ne može se dijagonalizirati.

9.15. a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
c) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; d) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$;
e) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; f) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
g) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; h) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

9.16. a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
c) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$; d) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

9.17. Matrica ovog operatora (vidi Zadatak 8.5.) je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ovo je dijagonalna blok matrica sa blokovima reda 1, 2 i 1, što bitno olakšava računanje karakterističnog polinoma:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det[\lambda - 1] \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \det[\lambda - 1]$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$$

pa su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ i $\lambda_4 = -1$. Svojstveni vektori su $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ i očigledno $v_1 = 1$, $v_2 = t$, $v_3 = t^2$, $v_4 = t^3$.

9.19. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

9.20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (u kanonskoj bazi $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$). $\lambda_1 = 1$, $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$.

9.21. Neka je su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ slične matrice pa postoji regularna matrica $\mathbf{S}$ takva da je $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$.
a) Koristimo svojstvo $\mathrm{tr}\,\mathbf{AB} = \mathrm{tr}\,\mathbf{BA}$. Imamo:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{S})) = \mathrm{tr}((\mathbf{A}\mathbf{S})\mathbf{S}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1})) = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}.$$

b) Ovdje koristimo Binet-Cauchyjev teorem:

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) = \det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{S}$$
$$= \det \mathbf{A}(\det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{S}) = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{I} = \det \mathbf{A}.$$

c)

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) = \det(\lambda \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{S})$$
$$= \det \mathbf{S}^{-1} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{S} = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})(\det \mathbf{S}^{-1} \det \mathbf{S})$$
$$= \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \det \mathbf{I} = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

9.23. Uzmimo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tada je

$$k(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

A poništava $k_{\mathbf{A}}(\lambda)$, tj. $\mathbf{A}^2 - (a+d)\mathbf{A} + (ad-bc)\mathbf{I} = \mathbf{0}$. Također je i $\operatorname{tr}\mathbf{A} = a + d$ i $\det \mathbf{A} = ad - bc$ pa slijedi tvrdnja.

9.24. Pretpostavimo obratno, neka takva matrica postoji. Ako je $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ za $k \geqslant 3$, onda je

$$\det \mathbf{A}^k = 0 \implies (\det \mathbf{A})^k = 0 \implies \det \mathbf{A} = 0.$$

Prema zadanoj jednakosti je $\mathbf{A}^2 = (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A}$ i indukcijom imamo $\mathbf{A}^k = (\operatorname{tr}\mathbf{A})^{k-1}\mathbf{A}$. Za $k \geqslant 3$ na lijevoj strani je nulmatrica pa zbog $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ slijedi $\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0$. Ponovnim uvrštavanjem u zadanu jednakost imamo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$. Kontradikcija! Slijedi da ne postoji takva matrica.

9.25. Vrijedi $\det(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = 0$. Trebamo pokazati da je tada i $\det(\mathbf{A}^4 + 4\mathbf{I}) = 0$. Koristimo faktorizaciju:

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Zbog toga je

$$\det(\mathbf{A}^4 + 4\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I})(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I})) = \det(\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \det(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = 0.$$

9.26. Za pridruženu matricu tog operatora također vrijedi $\mathbf{A}^2 = -\mathbf{A}$. Neka je λ svojstvena vrijednost zadanog operatora i $\mathbf{x}$ pripadajući svojstveni vektor. Tada je

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}$$

i s druge strane

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\lambda \mathbf{x}$$

pa je $\lambda^2 = -\lambda$ odnosno $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 0$.

9.27. Pretpostavimo obratno, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ jest svojstveni vektor od F. Postoji $\lambda \in \mathbf{R}$ takav da je

$$F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2).$$

Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti vektora $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Tada je

$$F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$$

pa mora biti

$$\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2,$$

odnosno

$$(\lambda - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + (\lambda - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0.$$

$\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ su pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima i stoga linearno nezavisni pa je $\lambda - \lambda_1 = 0$ i $\lambda - \lambda_2 = 0$, odnosno $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Slijedi tvrdnja.

9.28. Neka je λ odgovarajuća svojstvena vrijednost za vektor $\mathbf{x}$ i operator F. F je linearan pa vrijedi

$$\begin{aligned} F^n(\mathbf{x}) &= F^{n-1}(F(\mathbf{x})) = F^{n-1}(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda F^{n-1}(\mathbf{x}) = \lambda^2 F^{n-2}(\mathbf{x}) = \ldots = \lambda^n \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{x}$ je i svojstveni vektor za operator F^n, odgovarajuća svojstvena vrijednost je λ^n.

9.29. Neka je $\mathbf{x}$ svojstveni vektor za F i λ, tj. $F(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. F je regularan, svaka svojstvena vrijednost mu je različita od nule. Specijalno, $\lambda \neq 0$ pa vrijedi

$$F^{-1} \circ F(\mathbf{x}) = F^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F^{-1}(\mathbf{x}),$$

odnosno

$$F^{-1}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\mathbf{x}.$$

Dakle, λ^{-1} je svojstvena vrijednost za F^{-1} i odgovarajući svojstveni vektori su isti.

§ 10

10.15. a) Npr. $(2, 2, 1, 0)$, $(5, -2, -6, -1)$; b) npr. $(1, -2, 1, 0)$, $(25, 4, -17, -6)$.

10.16. a) $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ ili $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; b) npr. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

10.17. a) $(1, 2, 2, -1)$. $(2, 3, -3, 2)$, $(2, -1, -1, -2)$; b) $(1, 1, -1, 2)$, $(2, 5, 1, 3)$; c) $(2, 1, 3, -1)$. $(3, 2, -3, -1)$, $(1, 5, 1, 10)$.

10.18. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sin^2 x - \frac{1}{2})$.

10.20. Npr. $\mathbf{b}_1 = (2, -2, -1, 0)$ i $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0, -1)$.

10.21. a) $\mathbf{y} = (3, 1, -1, -2)$, $\mathbf{z} = (2, 1, -1, 4)$; b) $\mathbf{y} = (5, -5, -2, -1)$, $\mathbf{z} = (2, 1, 1, 3)$.

10.22. Trazimo koeficijente u prikazu $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$. Pomnožimo ovu jednakost skalarno sa $\mathbf{e}_j$. Zbog ortonormiranosti je

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_j) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j) = \alpha_j$$

pa tvrdnja slijedi.

10.23. Nadopunimo ovaj skup do ortonormirane baze za V $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (ukoliko on to nije). Po prethodnom zadatku vrijedi

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

§ 11

11.10. a) $f = -y_1^2 + y_2^2 - 12y_3^2$; $y_1 = -x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3$;

b) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2 + 2x_3$, $y_3 = x_3$;

c) $f = y_1^2 - \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$; $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $3x_2 + x_3$, $y_3 = x_3$;

d) $f = \frac{1}{6}y_1^2 + \frac{3}{13}y_2^2 + \frac{119}{27}$; $y_1 = 6x_1 - 2x_2 + 2x_3$, $y_2 = \frac{13}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$, $y_3 = x_3$;

e) $f = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{8}y_2^2 - 27y_3^2$; $y_1 = 3x_1 - x_2 + 2x_3$, $y_2 = \frac{8}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3$, $y_3 = x_3$;

f) $f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - \frac{15}{4}z_3^2$; $y_2 = x_2 - 2x_3 - x_1$, $z_1 = 2x_1 + y_2 + \frac{3}{2}x_3$, $z_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{4}x_3$, $z_3 = x_3$;

g) $f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2$; $y_2 = \frac{1}{2}x_2 - x_1$; $z_1 = 2x_1 + y_2 + x_3$, $z_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_3$.

11.11. a) $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; b) $f = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix};$$ c) $f = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$;

d) $f = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; e) $f = 3y_1^2 - 6y_2^2$.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix};$$ f) $f = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}$;

g) $f = 2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 - 4x_4^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

h) $f = 4y_1^2 + 8y_2^2 + 12y_3^2 - 4x_4^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

i) $f = 5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$; j) $f = 2y_1^2 - 4y_2^2$,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}; \quad \text{k)}\ f = 9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2,\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

11.12. **a)** Pozitivno-definitna; **b)** negativno-definitna; **c)** indefinitna; **d)** negativno-definitna; **e)** pozitivno-definitna; **f)** indefinitna; **g)** pozitivno-definitna.

11.13. **a)** $\lambda > 2$; **b)** $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$; **c)** $-0.8 < \lambda < 0$; **d)** ne postoji takav λ; **e)** ne postoji takav λ; **f)** ne postoji takav λ; **g)** ne postoji takav λ; **h)** ne postoji takav λ; **i)** $\forall\lambda \neq 0$.

11.14. **a)** Ne postoji takav λ; **b)** ne postoji takav λ; **c)** $\lambda < -1$; **d)** $\lambda < -20$; **e)** $\lambda < -0.6$.

11.15. **a)** Pozitivno definitna za $\lambda > 4$, indefinitna inače; **b)** indefinitna $\forall\lambda \in \mathbf{R}$; **c)** indefinitna $\forall\lambda \in \mathbf{R}$.

11.16. **a)** Elipsa $\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{4} = 1$; **b)** dva pravca $x''^2 - y''^2 = 1$; **c)** parabola $y''^2 = x''$; **d)** elipsa $\frac{x''^2}{2} + dry''^2 1 = 1$; **e)** parabola $y''^2 = 4\sqrt{2}x''$; **f)** hiperbola $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1$; **g)** paralelni pravci $x'' = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i $x'' = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; **h)** elipsa $\frac{x''^2}{\frac{35}{6}} + \frac{y''^2}{\frac{35}{36}} = 1$; **i)** parabola $y''^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

11.17. **a)** Hiperbolički paraboloid $\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = z''$;

b) elipsoid $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} + \frac{z''^2}{\frac{2}{3}} = 1$;

c) hiperbolički paraboloid $\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{1} = -2z''$;

d) dvoplošni eliptički hiperboloid $-\frac{x''^2}{\frac{4}{5}} - \frac{y''^2}{\frac{4}{15}} + \frac{z''^2}{\frac{4}{25}} = 1$;

e) eliptički paraboloid $\frac{x''^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2z''$;

f) parabolički cilindar $y''^2 = \frac{4}{3}x''$;

g) eliptički cilindar $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{1} = 1$;

h) jednoplošni eliptički hiperboloid $\frac{x''^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{6}} - \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} = 1$;

i) hiperbolički cilindar $\frac{x''^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y''^2}{\frac{1}{3}} = 1$.